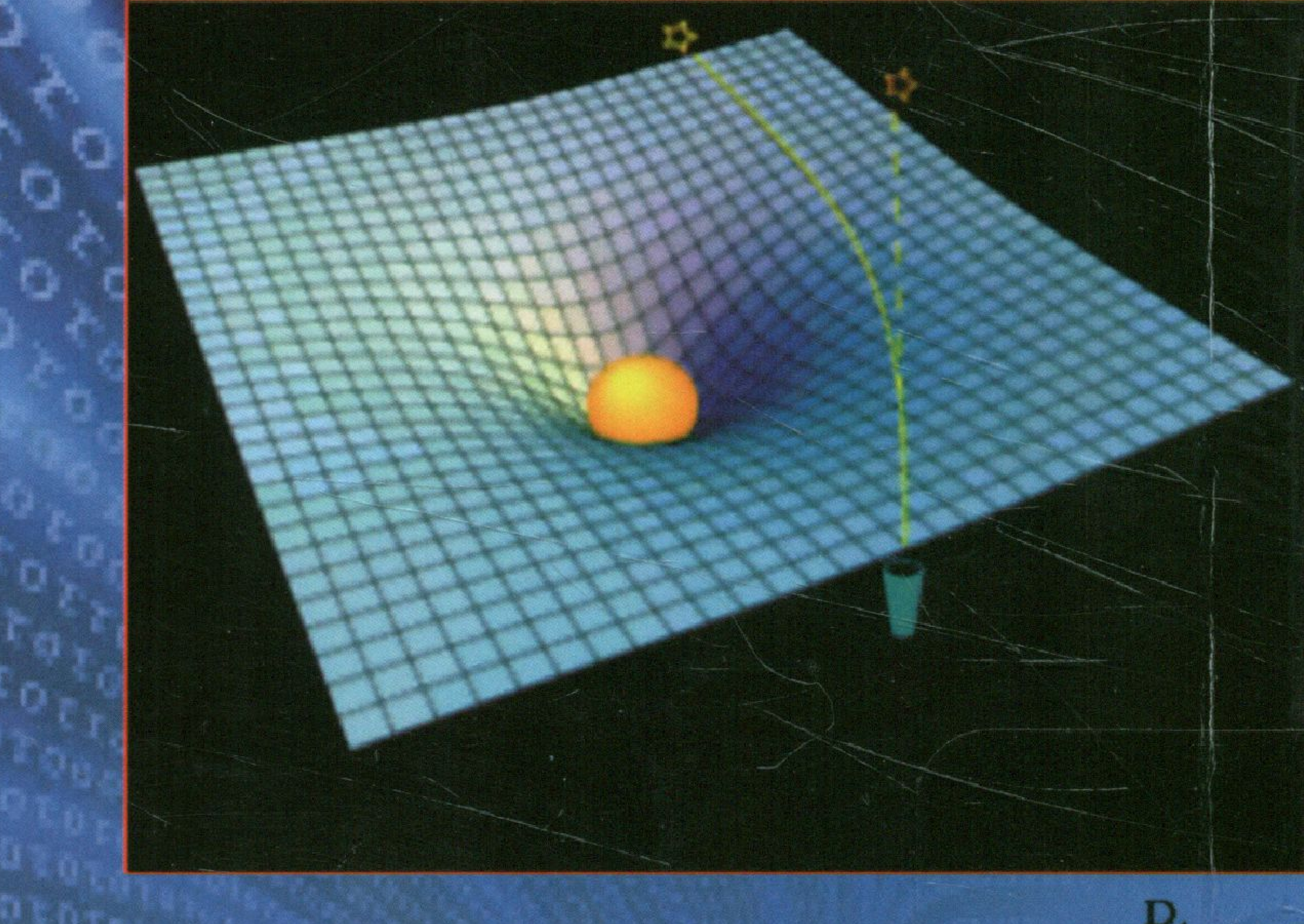
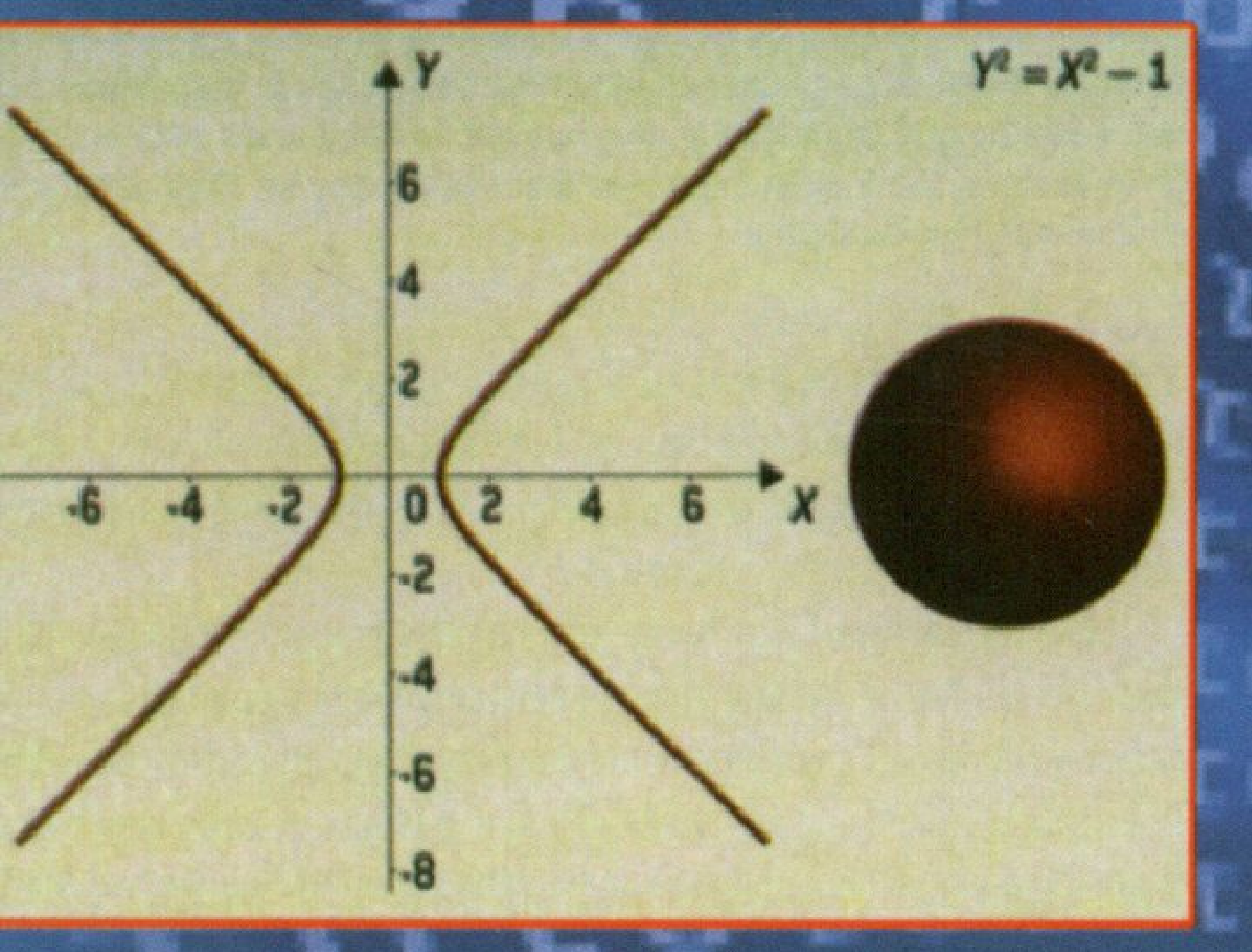
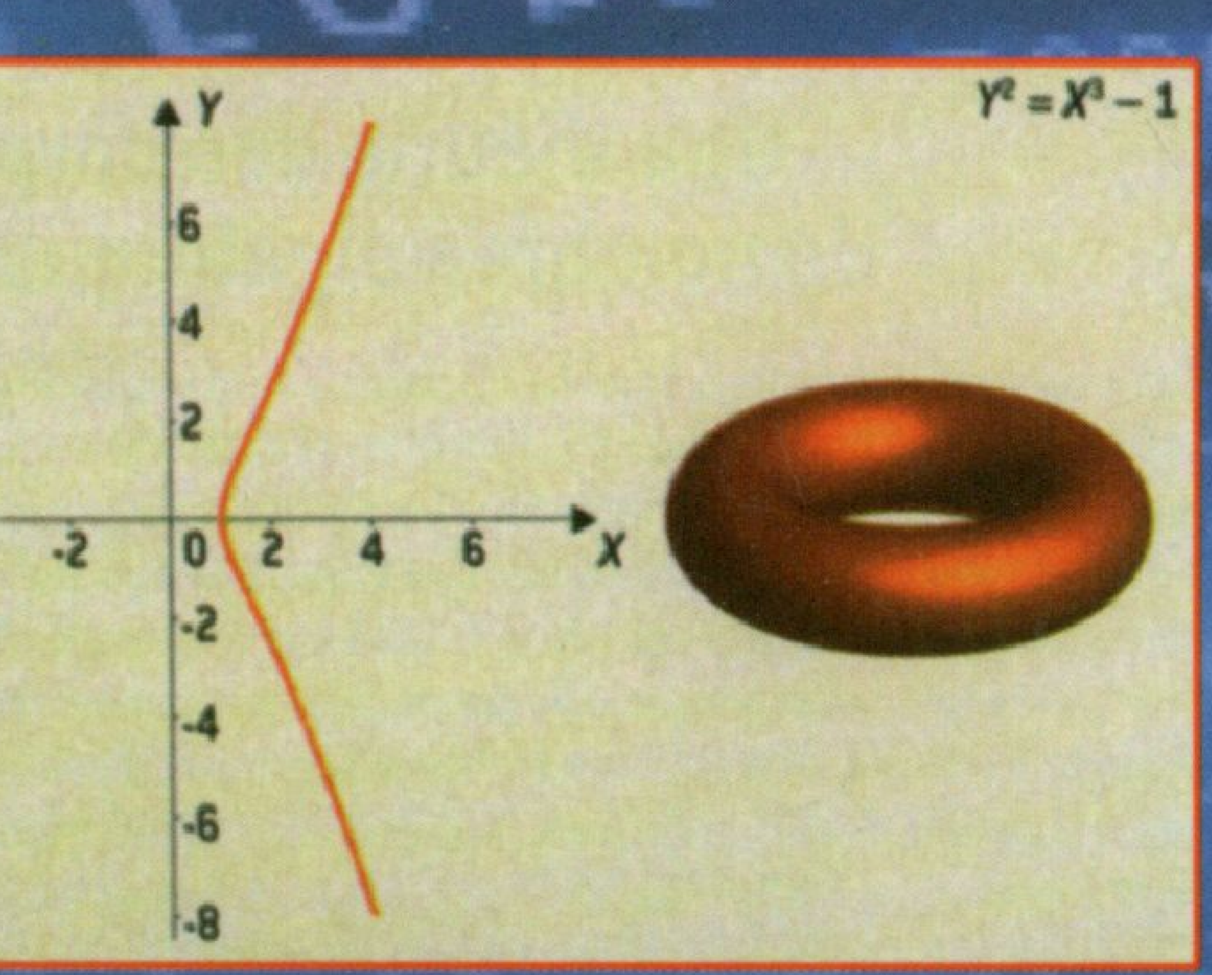


الهندسة الفضائية - المتتاليات والمتسلسلات
المنحنيات

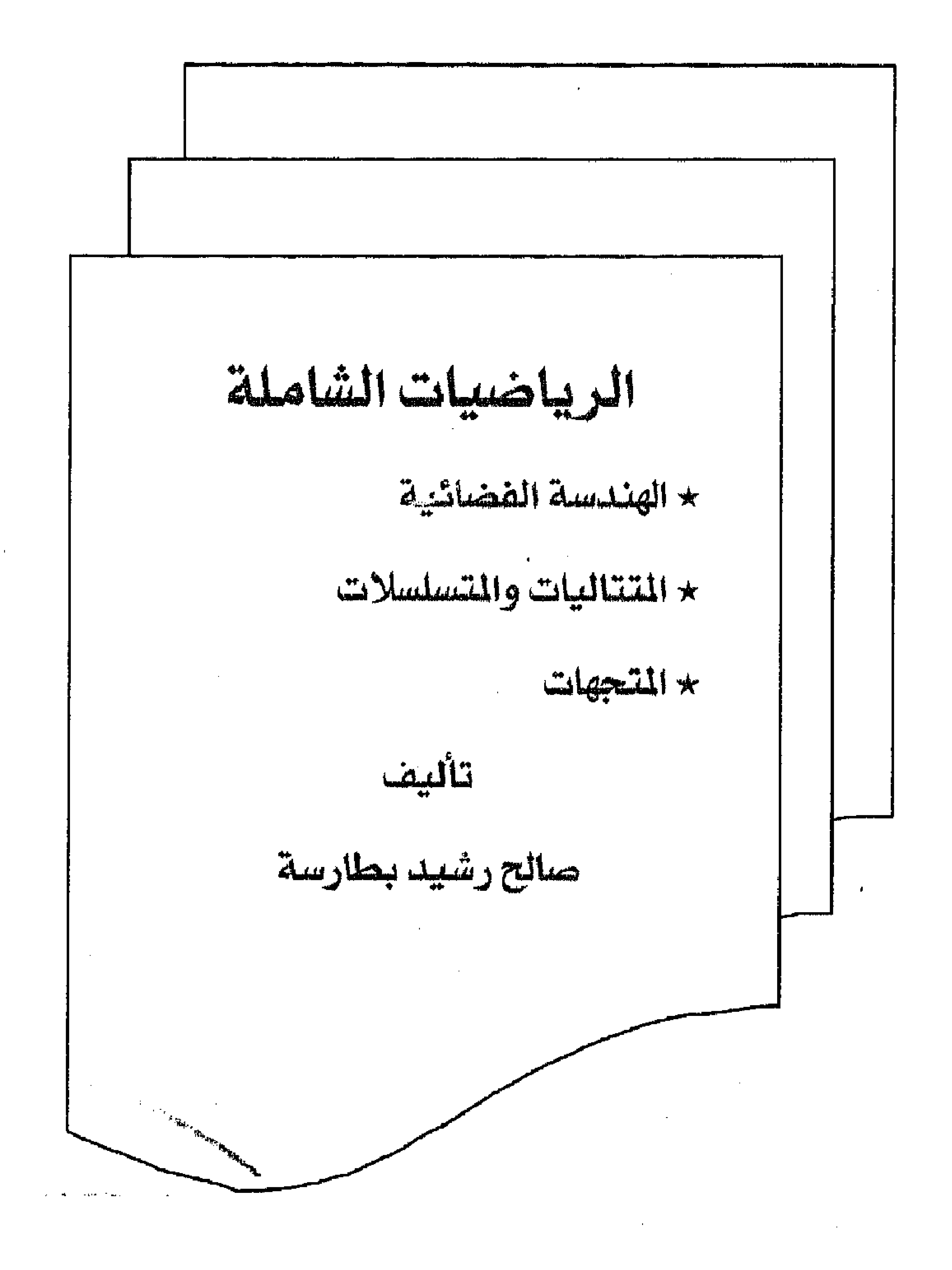


صالح رشيد بطارسة









الرياضيات الشاملة

★ الهندسة الفضائية

★ المتتاليات والمتسلسلات

★ المتجهات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- **هاتف :** 5658252 – 5658253
- **فاكس :** 5658254
- **العنوان : العبدلي- مقابل البنك العربي**

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة ، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع ، 2013.

( ) ص .

ر.أ :(2013/6/2214).

الواصفات : الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

الهندسة الفضائية

المتتاليات والمتسلسلات

المتجهات

المقدمة

بعد الاتكال على الله،،،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدَّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة،،، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

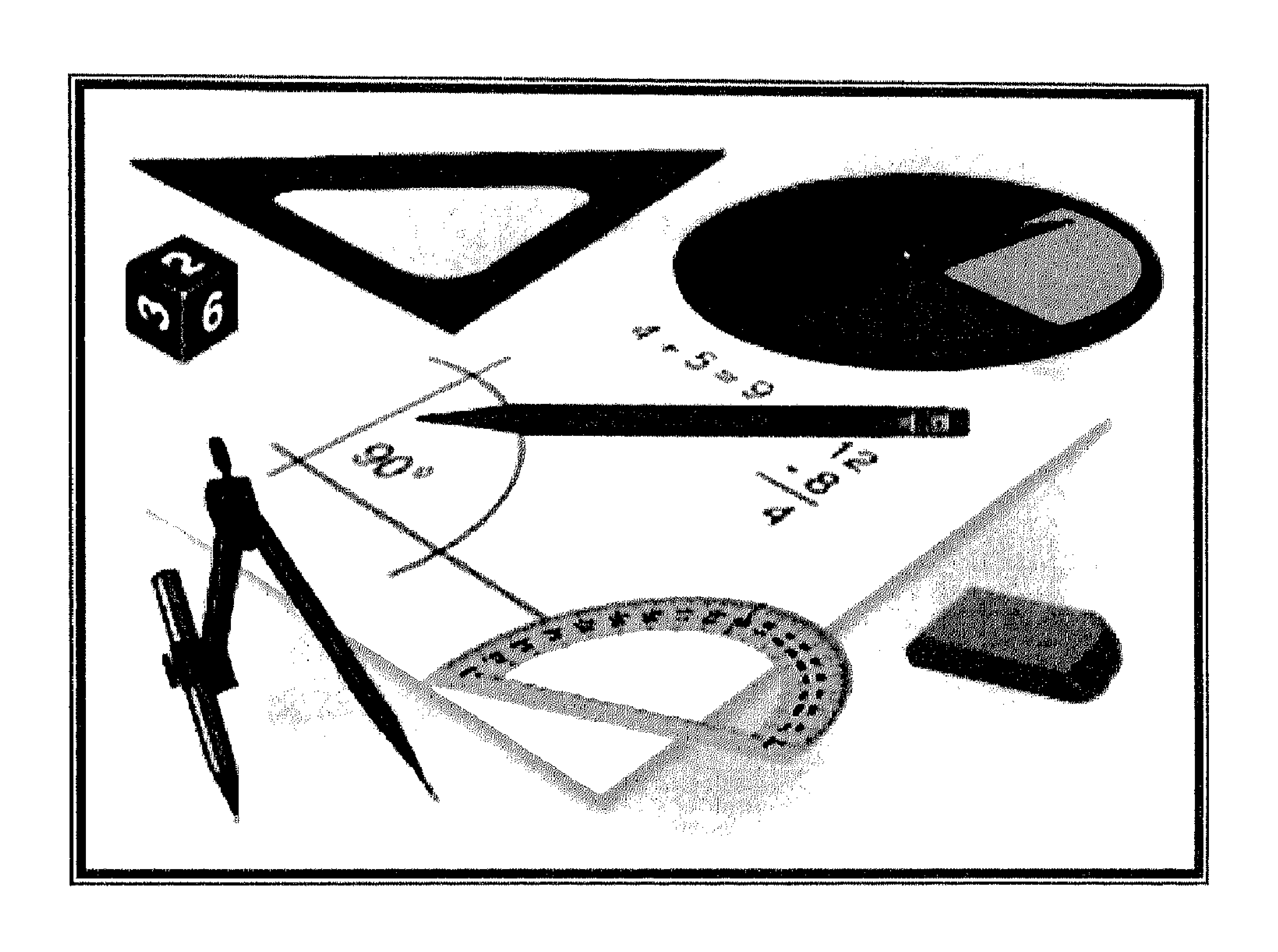
المؤلف

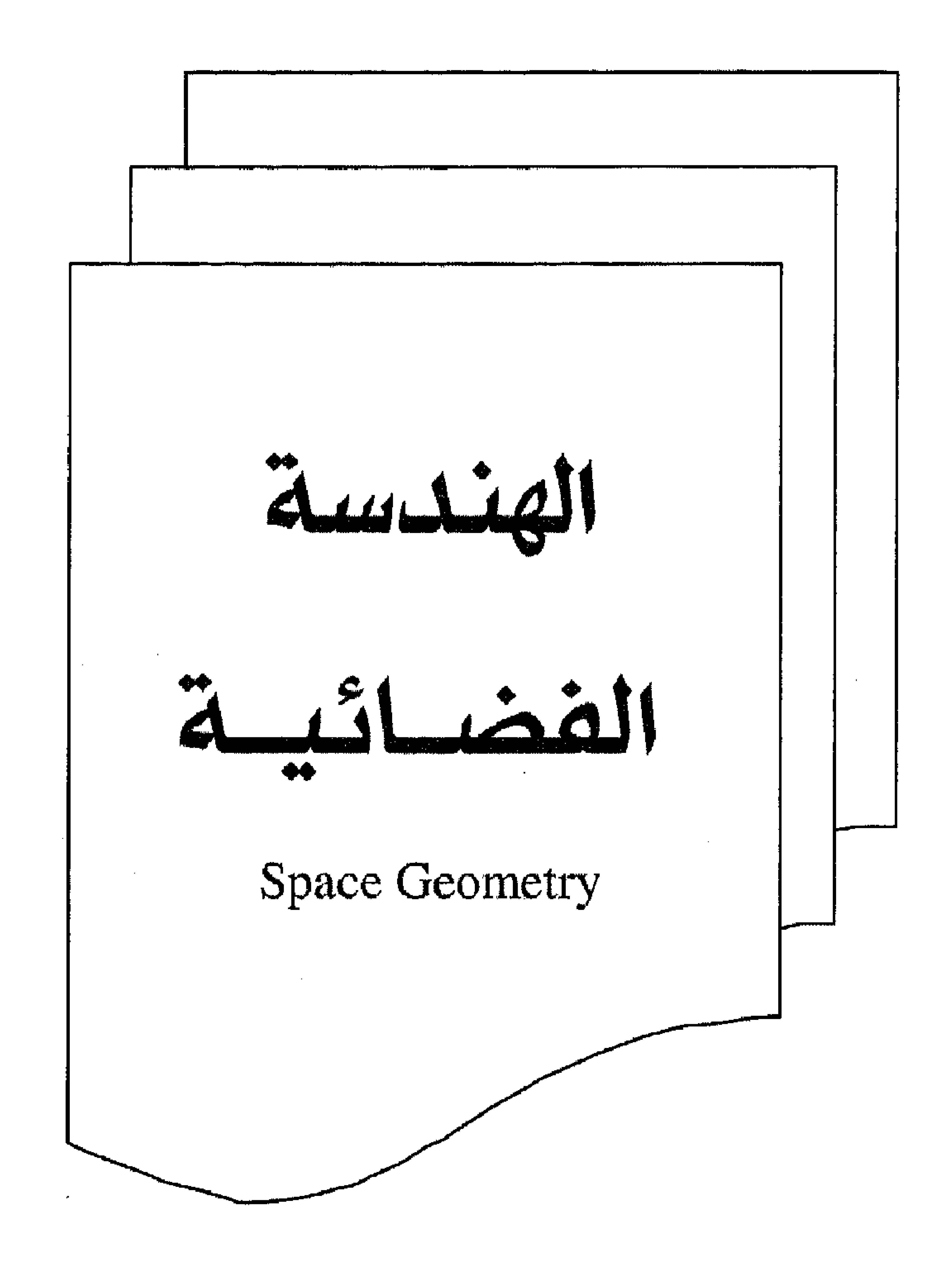
تنويه

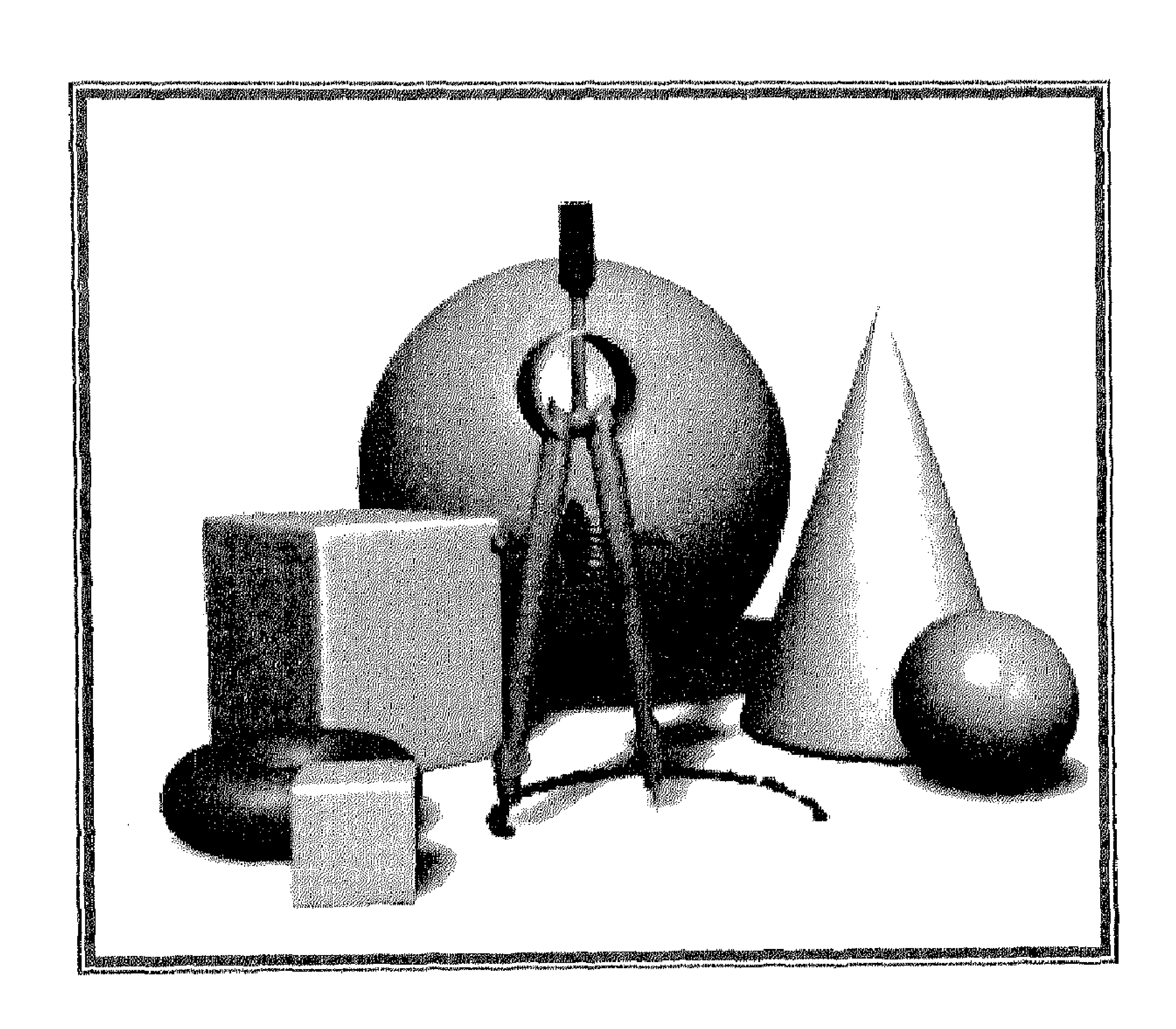
في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف


2
3
6
90°


الهندسة
الفضائيـــة
Space Geometry



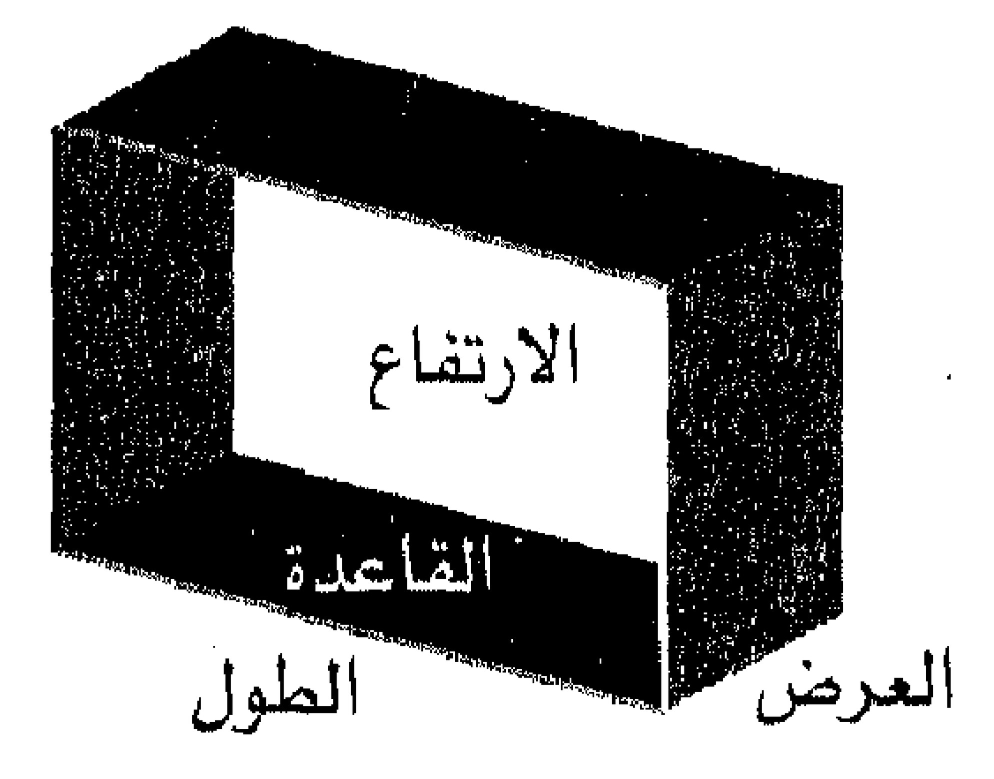
الهندسة الفضائية فرع من فروع الهندسة القديم، ابتكر قبل ألوف السنين في الوقت الذي شعر فيه الإنسان بحاجته الماسة لمعرفة أشكال الأجسام المتناثرة حوله في جميع الأركان، يرجع تاريخها إلى الإغريق وقدماء المصريين والبابليين.

(١٤ ـ ١) المجسمات Solids:

تبحث الهندسة الفضائية في العلاقة بين المستقيمات والمستويات التي يحتويها الفضاء لهذا فهي تختص بدراسة المجسمات كمتوازي المستطيلات والمكعب والموشور والهرم والإسطوانة والمخروط والكرة من حيث حجومها ومساحات سطوحها كما في هذه السطور:

أولاً: متوازي المستطيلات Rectanglular Solid

متوازي المستطيلات مجسم ذو ثلاثة أبعاد هي الطول والعرض والارتفاع، له قاعدتان متطابقتان هما وجهان متقابلان من وجوهه الستة المستطيلة كما في الشكل.



وبإيجاز شديد:

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع (وحدة حجم)

مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين × الارتفاع

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي قاعدتيه

⇦ مثال: متوازي مستطيلات أبعاده ٨ سم، ٦ سم، ٥ سم.

احسب:

(١) حجمه (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية

حجمه = الطول × العرض × الارتفاع

= ٨ × ٦ × ٥ = ٢٤٠ سم^{٣}

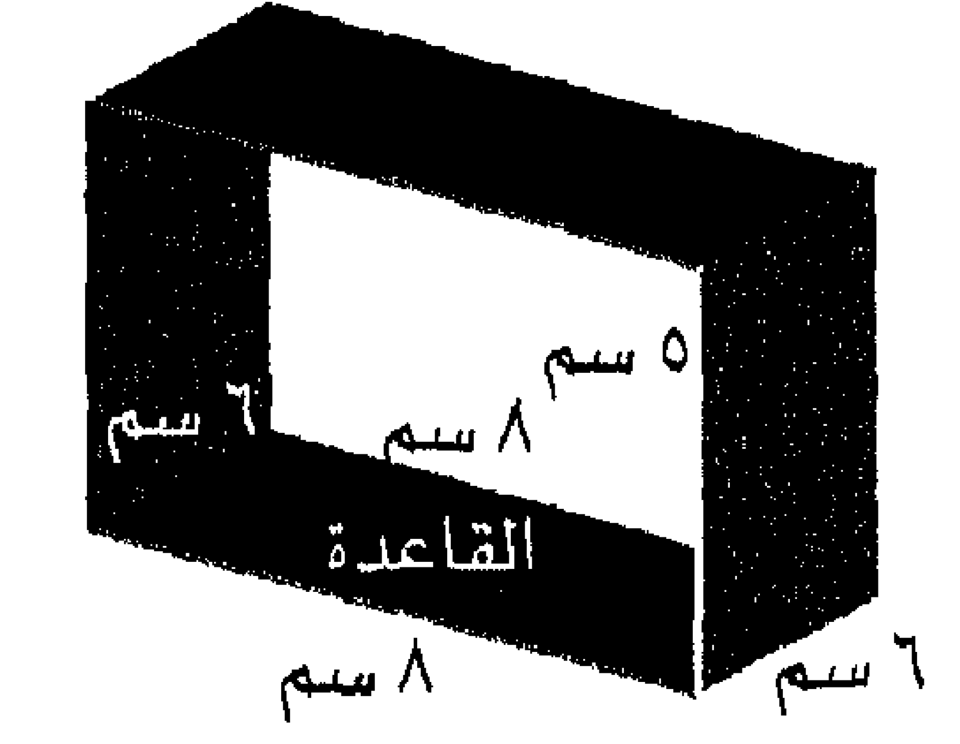
مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين × الارتفاع

= (مجموع أضلاع القاعدة) × الارتفاع

= (٨ + ٦ + ٨ + ٦) × ٥

= (٢٨) (٥)

= ١٤٠ سم^{٢}



مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي قاعدتيه

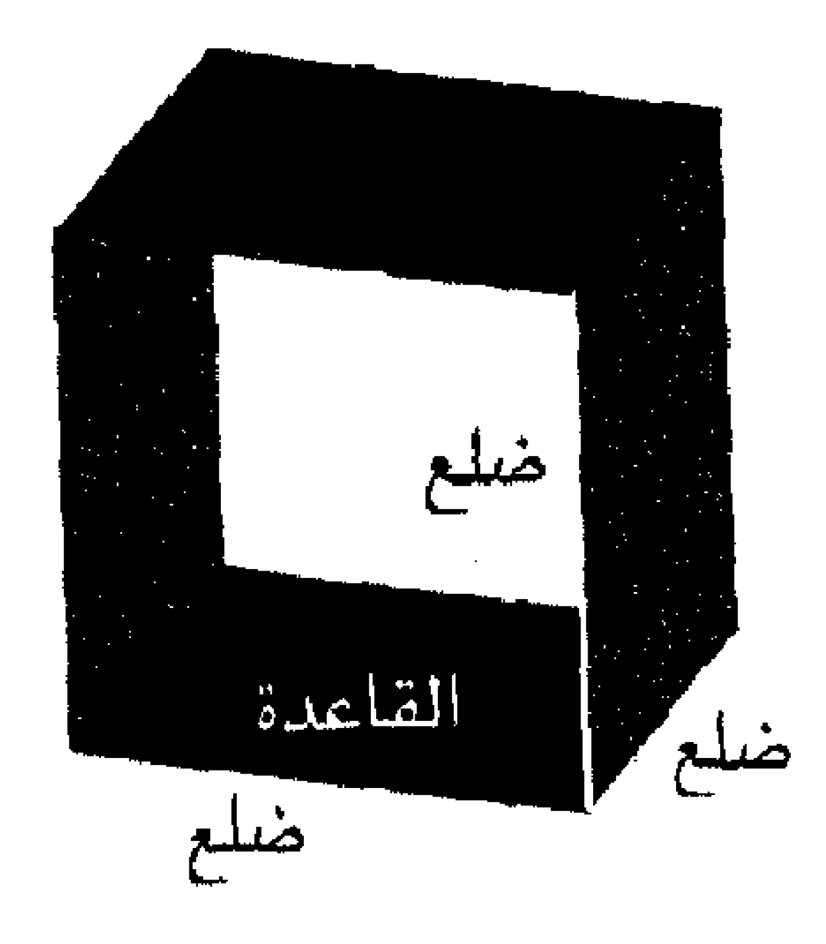
= ١٤٠ + ٢ (٦× ٨)

= ١٤٠ + ٩٦

= ٢٣٦ سم^{٢}

ثانياً: المكعب Cubic

والمكعب مجسم ذو ثلاثة أبعاد متطابقة تماماً يسمى كل منها حرف أو ضلع المكعب، سطوحه أو أوجهه الستة مربعات متطابقة أيضاً، له قاعدتان هما مربعان متقابلان كما في الشكل



حجم المكعب = الضلع × الضلع × الضلع

$=$ (الضلع)^{3}

مساحته الجانبية = محيط إحدى القاعدتين × ارتفاعه (طول ضلعه)

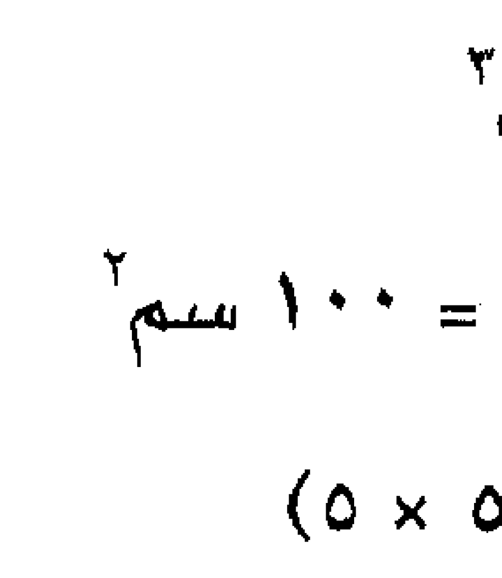
= (ضلع + ضلع + ضلع + ضلع) (ضلع)

= ٤ (ضلع)^{2}

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه

= ٤ (ضلع)^{2} + ٢ (ضلع)^{2} = ٦ (ضلع)^{2}

⇦ مثال: مكعب طول ضلعه أو حرفه ٥ سم احسب حجمه، مساحته الجانبية، مساحته الكلية.



حجمه = ٥ × ٥ ×٥ = ١٢٥ سم^{3}

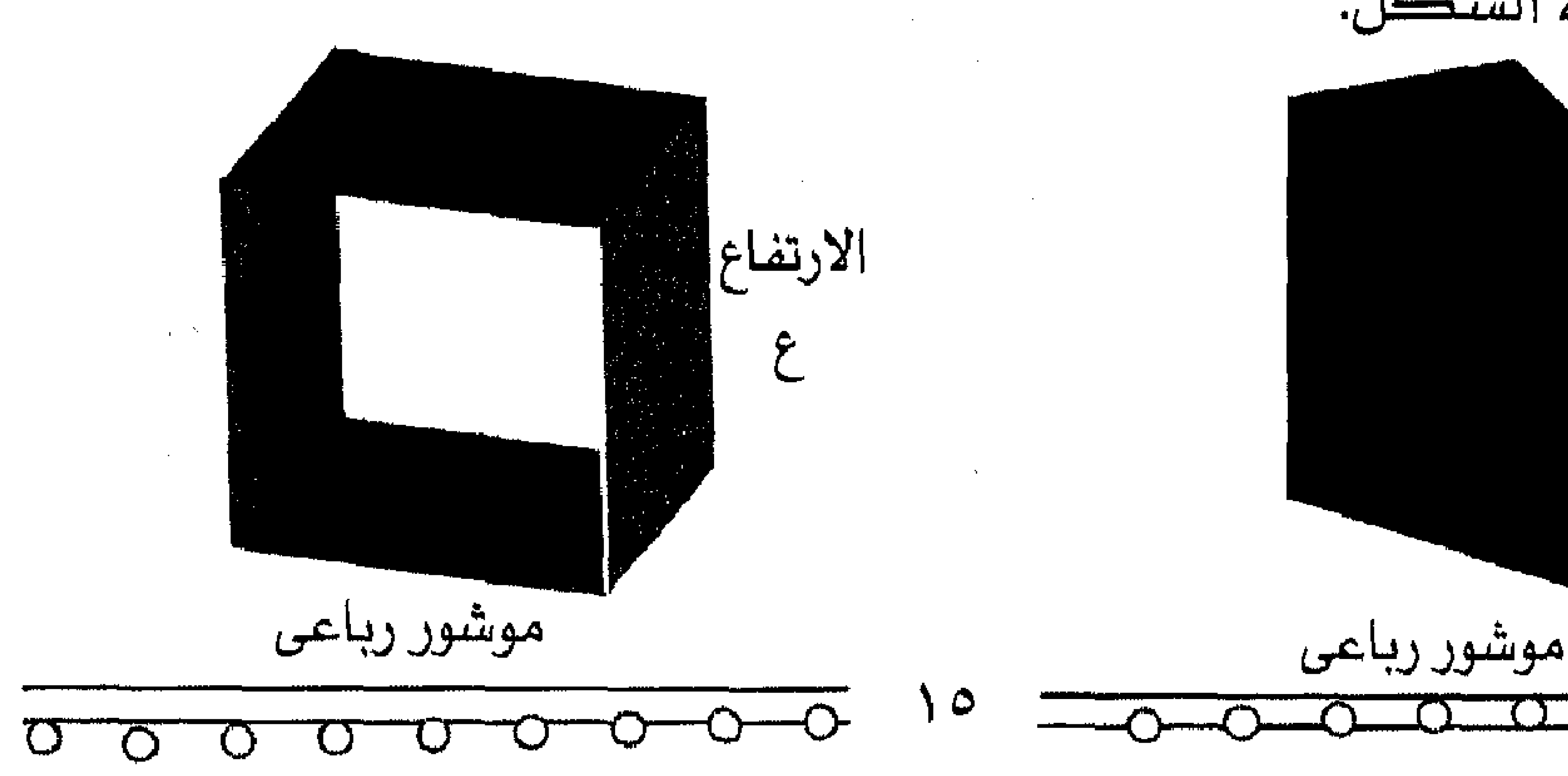
مساحته الجانبية = ٤ (٥ × ٥) = ١٠٠ سم^{2}

مساحته الكلية = ١٠٠ + ٢ (٥ × ٥)

أو ٦ (٥ × ٥) = ٦ (٢٥) = ١٥٠ سم^{2}

ثالثاً: الموشور القائم Prism

الموشور القائم مجسم له قاعدتان مستويتان متطابقتان، وأسطحه الجانبية أوجهه مستطيلات، يسمى الموشور بدلالة قاعدتيه، فالموشور ثلاثياً إذا كانت كل من قاعدتيه مثلث، والموشور رباعياً إذا كانت كل من قاعدتيه شكل رباعي وهكذا كما في الشكل.

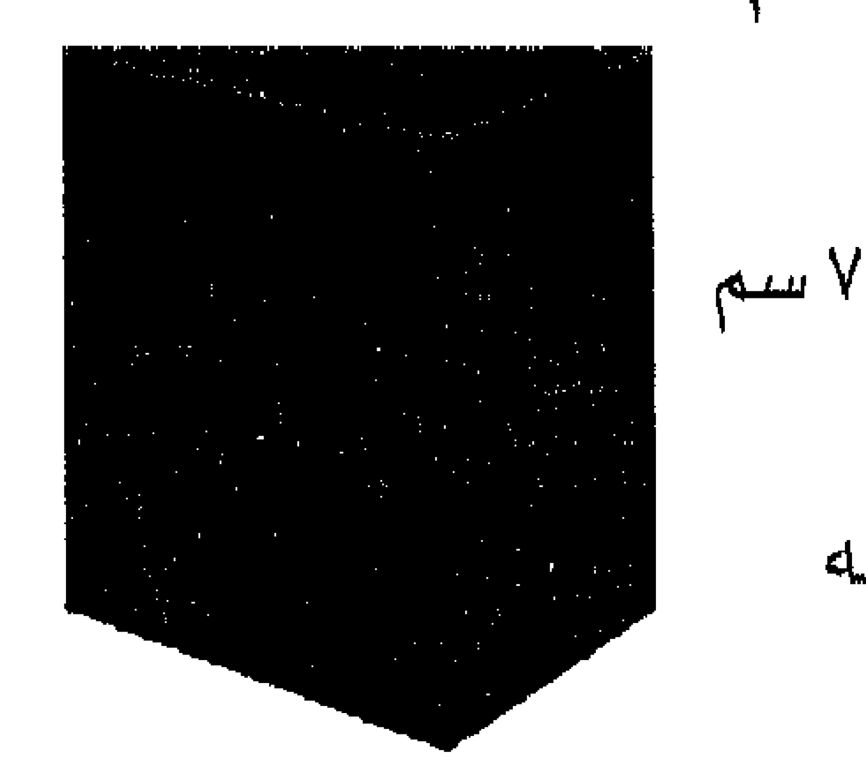


حجم الموشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع حيث ع ارتفاعه

مساحته الجانبية = محيط إحدى قاعدتيه × ارتفاعه

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه.

⇦ مثال: موشور ثلاثي قاعدته مثلث مساحته ١٠سم، وطول محيطه ٨ سم احسب حجم الموشور ومساحته الكلية إذا كان ارتفاعه ٧ سم.



٧ سم

حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١٠ × ٧ = ٧٠ سم^{٣}

مساحته الجانبية = محيط إحدى قاعدتيه × ارتفاعه

= ٨ × ٧ = ٥٦ سم^{٢}

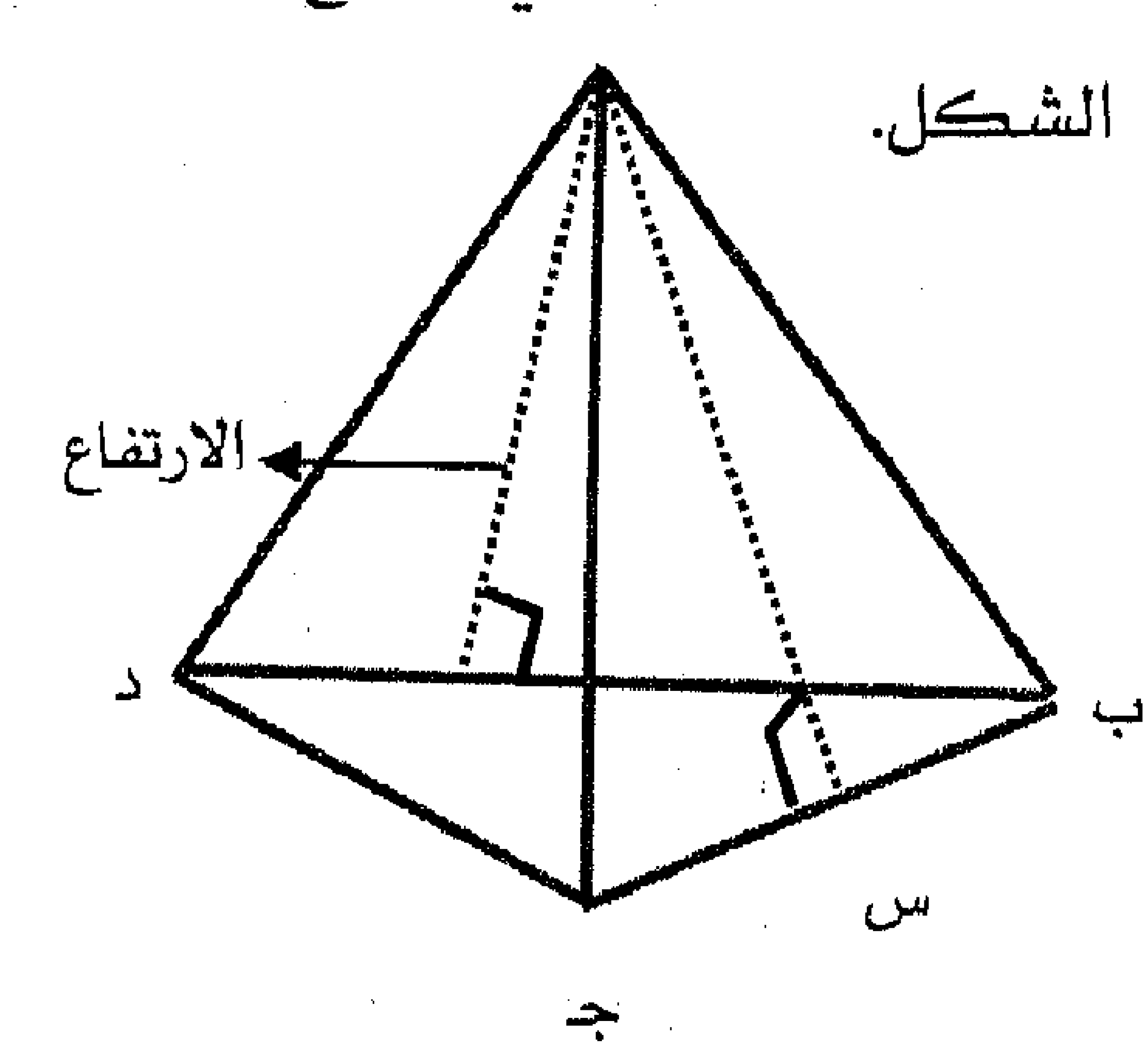
القاعدة: المساحة= ١٠ سم^{٢}، المحيط= ٨ سم

مساحته الكلية = ٥٦ + مساحة قاعدتيه.

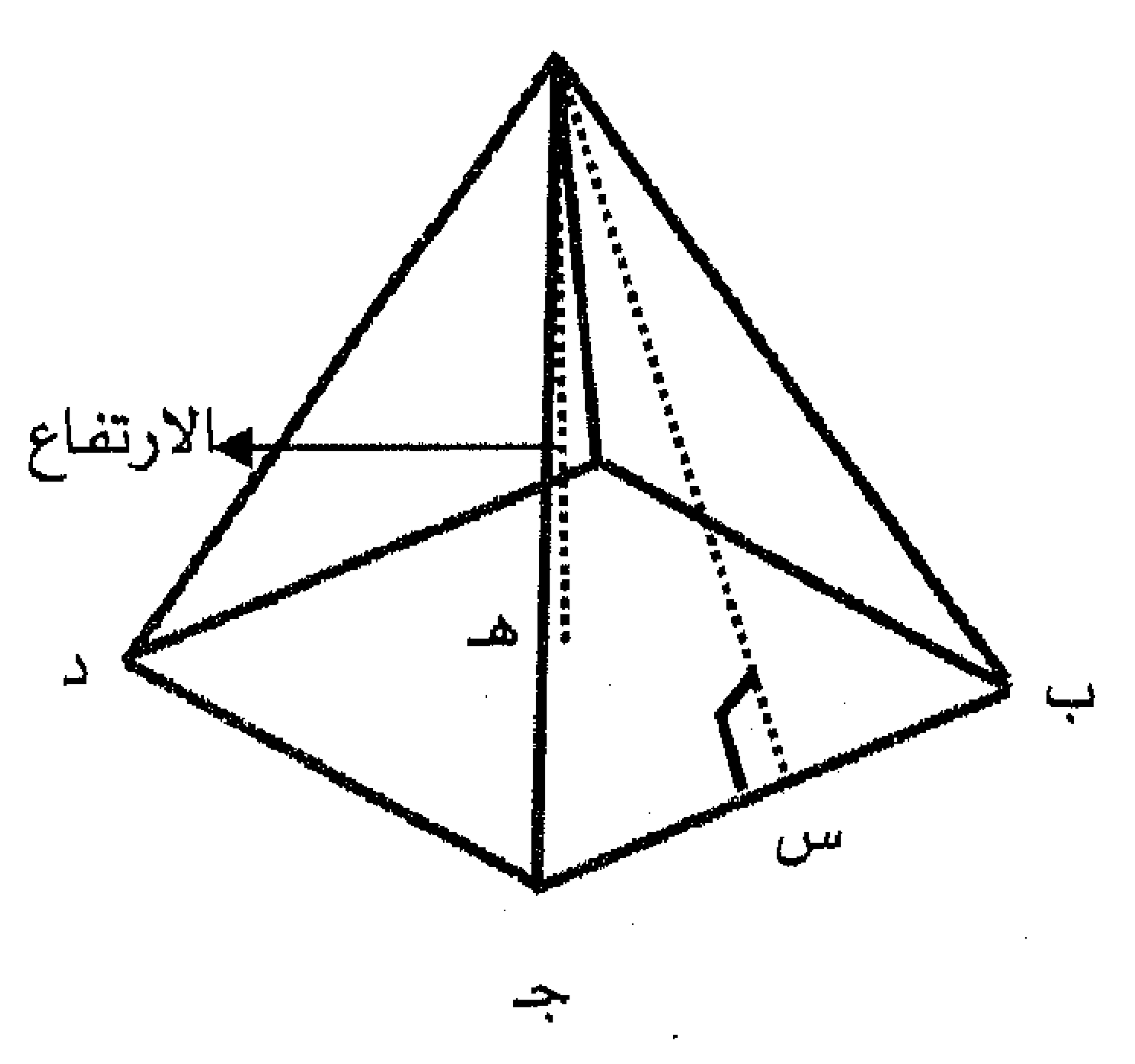
= ٥٦ + ٢ (١٠) = ٥٦ + ٢٠= ٧٦ سم^{٢}

رابعاً: الهرم Pyramind

الهرم القائم مجسم له قاعدته واحدة يقابلها رأس واحد فقط، يُسمى الهرم بدلالة قاعدته فهو هرم ثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث وهرم رباعي إذا كانت قاعدنه شكل رباعي (مربع، مستطيل، متوازي أضلاع، معين) وهكذا كما في الشكل.



هرم ثلاثي



هرم رباعي

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي (أس بالشكل)

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

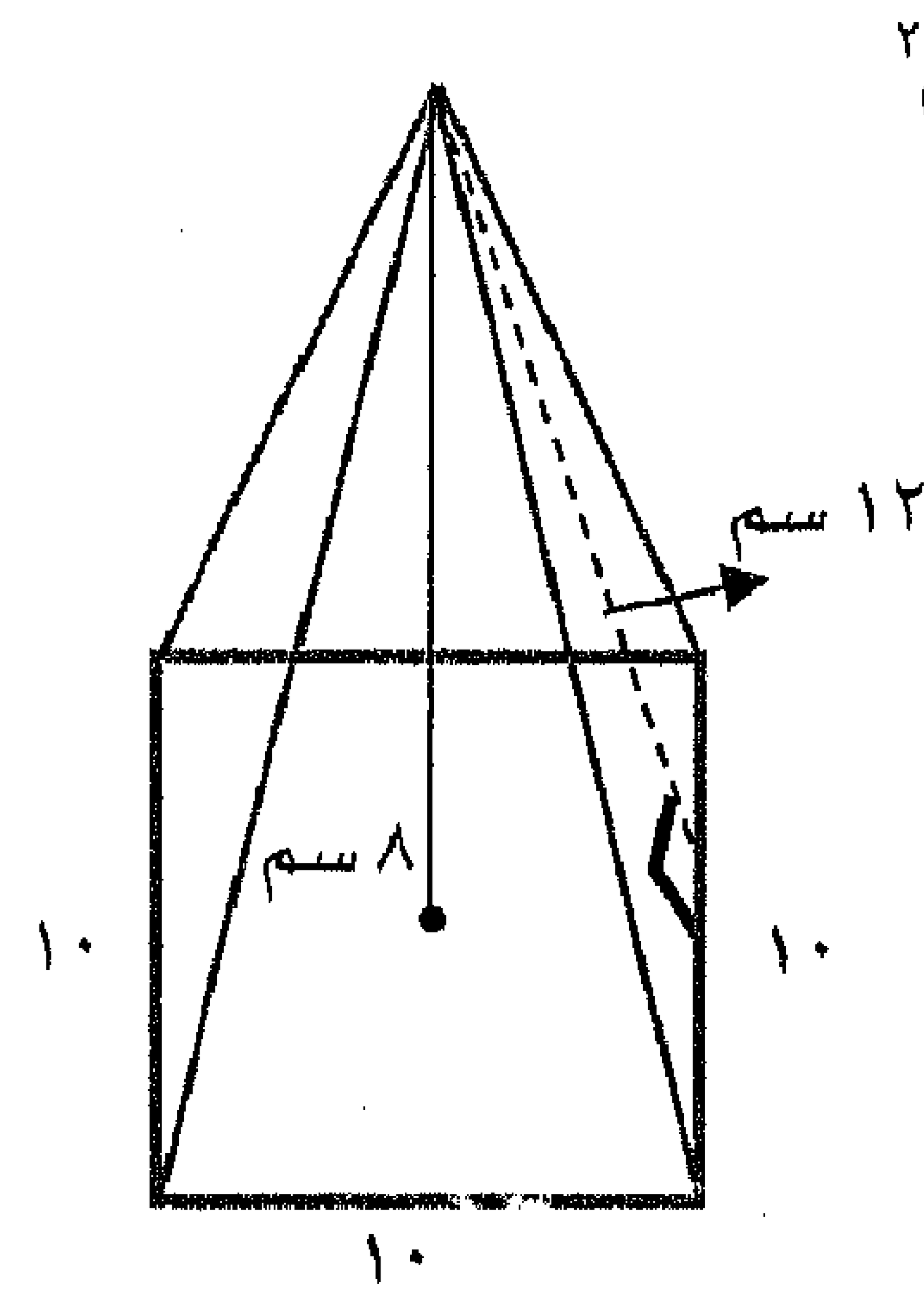
⇦ مثال: هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلعه ١٠ سم وارتفاعه ٨ سم وارتفاعه الجانبي ١٢ سم احسب:

(١) حجمه (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية

حجمه = $\frac{1}{3}$ × (١٠)^2 × ٨ = ٢٦٦,٦ سم^3

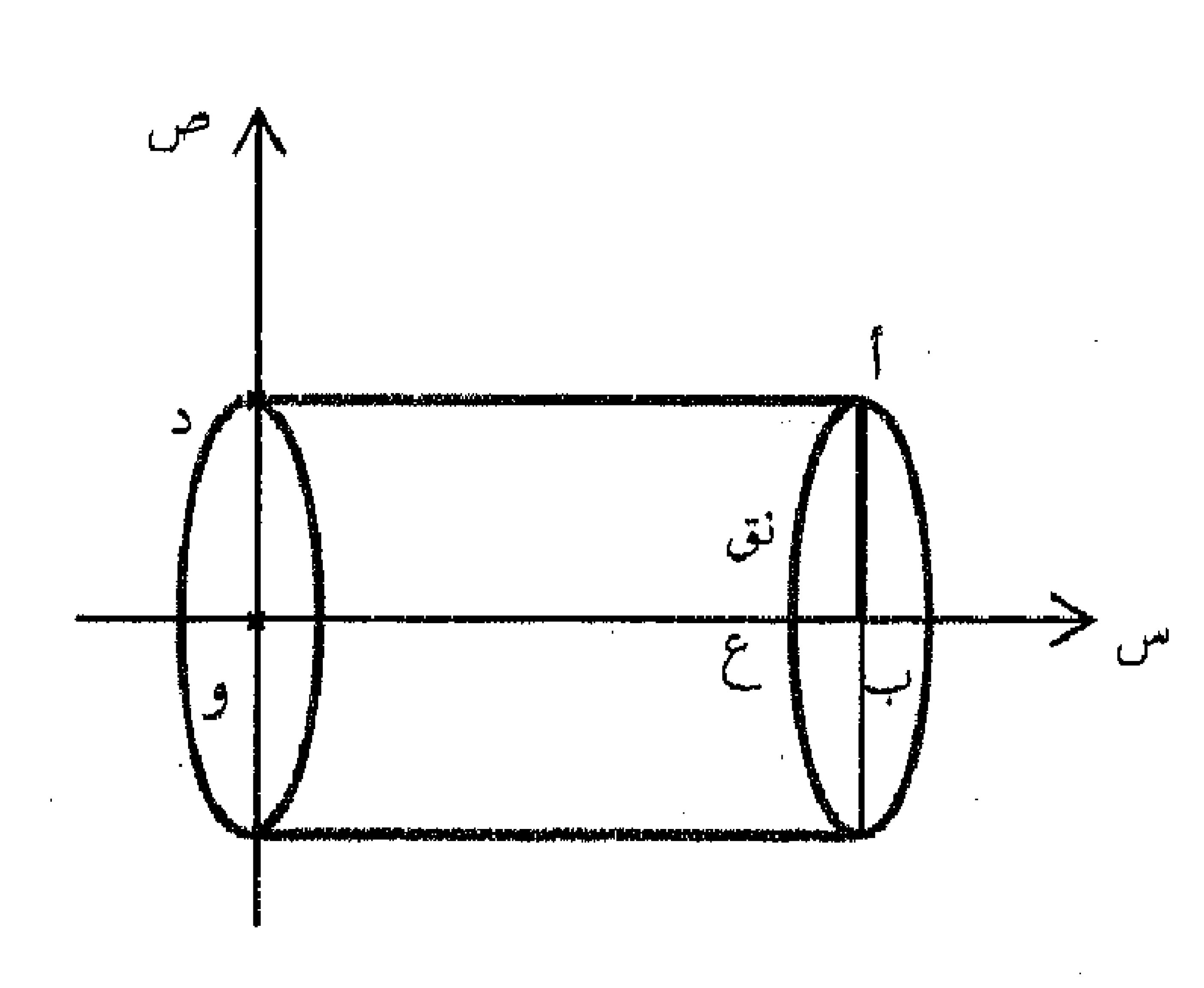
مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ (١٠ × ٤) × ١٢ = ١٢٠ سم^2

مساحته الكلية = ١٢٠+ (١٠× ١٠) = ٢٢٠ سم^2



خامساً: الاسطوانة Cylinder

الأسطوانة جسم (مجسم) دوراني ينشأ عن دوران مستطيل حول أحد أبعاده في الفضاء دورة كاملة كما في الشكل فالإسطوانة في الشكل نشأت من دوران المستطيل أ ب و د حول البعد ب و المنطبق على محور السينات دورة كاملة فتشكلت قاعدتاها الدائريتان،



والاسطوانة لها قاعدتان متطابقتان تماماً.

حجم الاسطوانة = نق^{٢} π ع حيث نق نصف قطر كل قاعدة من قاعدتها

π = ٣,١٤ = $\frac{٢٢}{٧}$

ع ارتفاعها

مساحتها الجانبية = ٢ نق π ع

مساحتها الكلية = ٢ نق π ع + مساحتي قاعدتيها

= ٢ نق π ع + نق^{٢} π ع

⇦ مثال: أسطوانة نصف قطرها ٧سم وارتفاعها ١٢ سم أوجد حجمها ومساحتها الجانبية والكلية.

الحجم = نق^{٢} π ع = ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٢ = ١٨٤٨ سم^{٣}

مساحتها الجانبية = ٢ نق π ع

= (٢) (٧) (٣,١٤) (١٢)

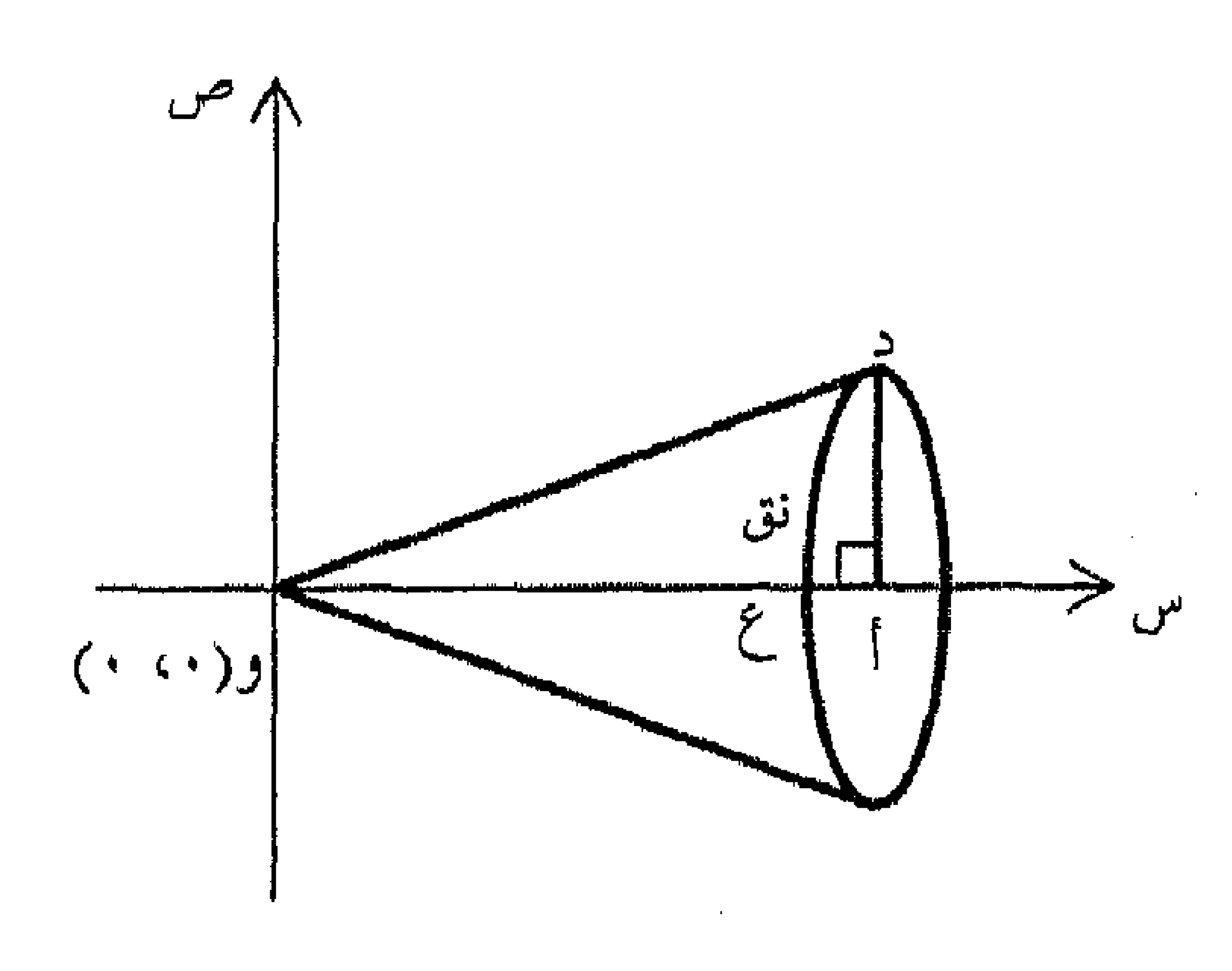
= ٧٢٧,٥٢ سم^{٢}

مساحتها الكلية = ٧٢٧,٥٢ + ٢ (٧)^{٢} ($\frac{٢٢}{٧}$) = ٧٢٧,٥٢ + ٣٠٨

= ١٠٣٥,٥٢ سم^{٢}

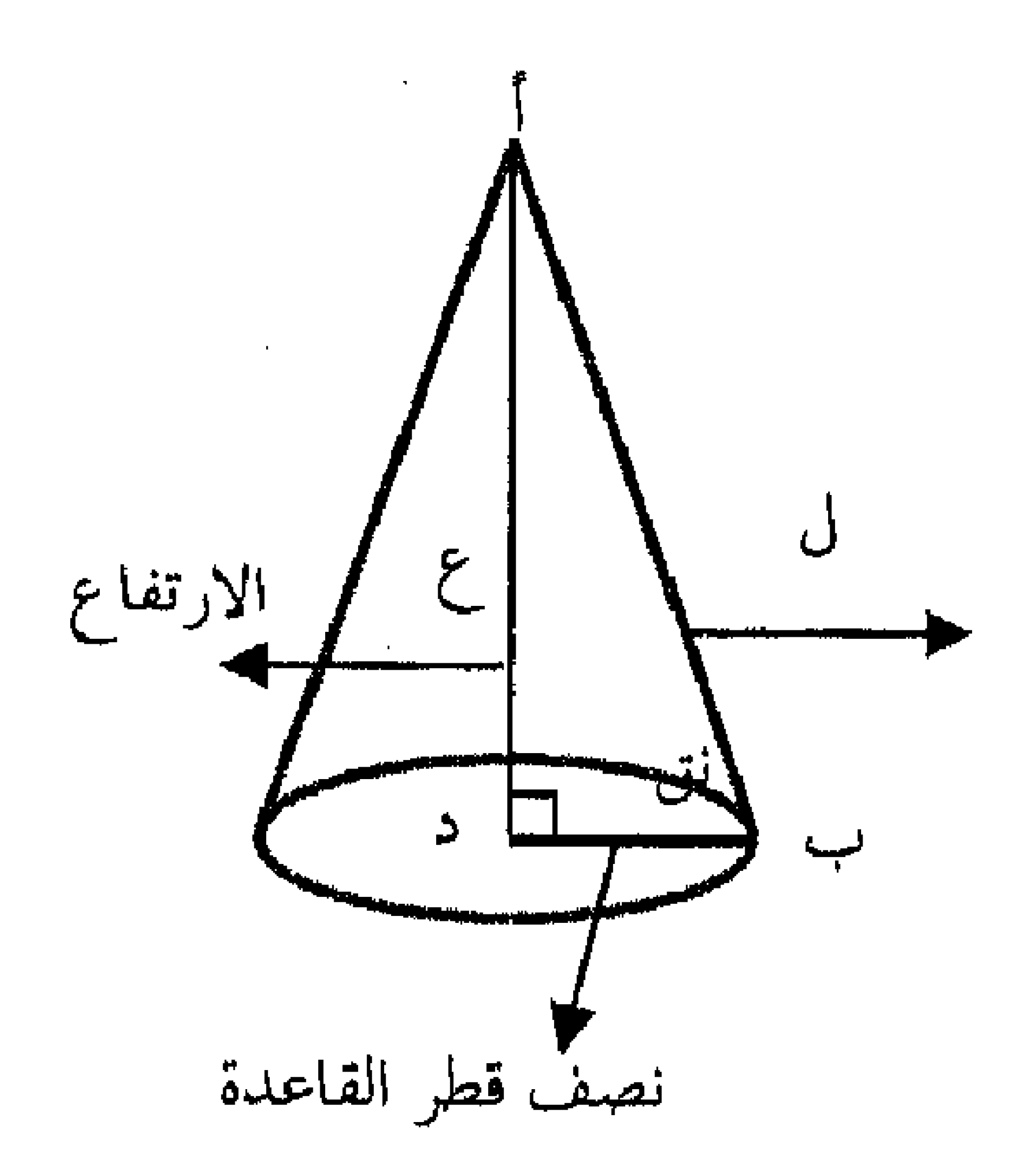
سادساً: المخروط القائم Cone

المخروط جسم (مجسم) دوراني ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية في الفضاء حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة كما في الشكل فالمخروط نشأ من دوران المثلث أ و ب حول الضلع أ د



المنطبق على محور السينات دورة كاملة فشكلت قاعدته الدائرية ، للمخروط قاعدة واحدة فقط.

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع حيث نق نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية



ع ارتفاع المخروط

π = $\frac{22}{7}$ أو ٣,١٤

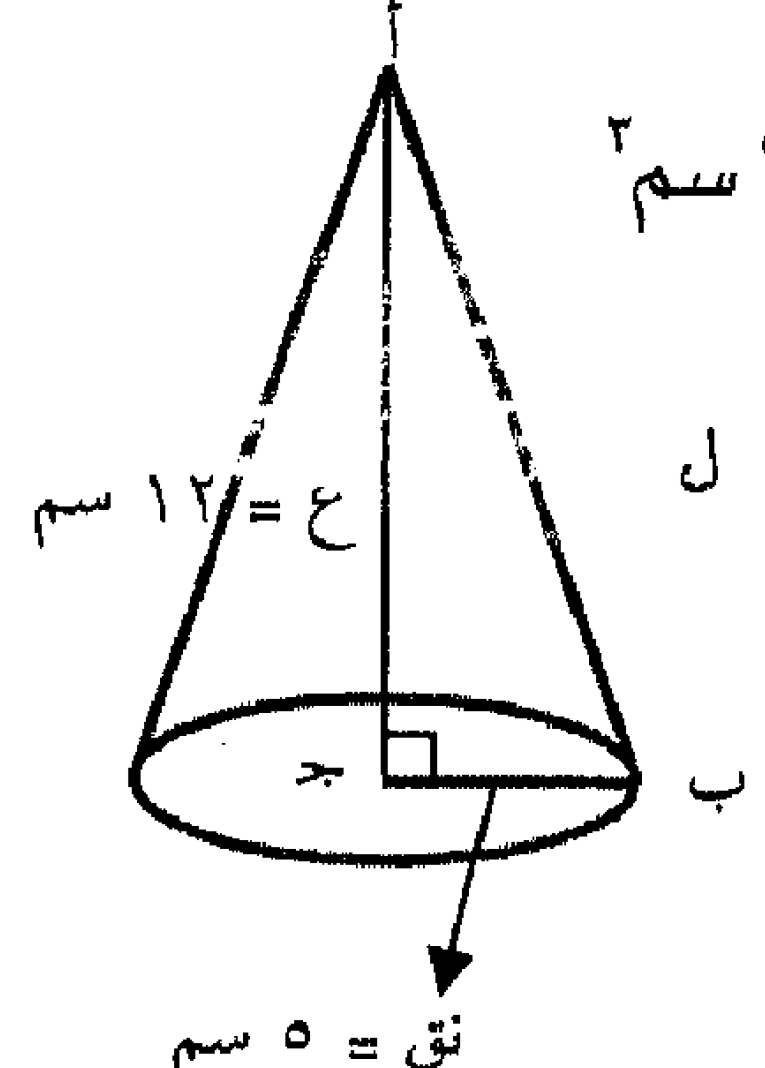
مساحته الجانبية = π نق ل حيث ل راسم المخروط كما في الشكل

مساحته الكلية = π نق ل + π نق^2

والعلاقة بين الراسم (ل) والارتفاع (ع) ونصف القطر (نق) توضح هكذا:

ل^2 = ع^2 + نق^2 (نظرية فيتاغورس) حيث المثلث أ د ب قائم الزاوية.

⇦ مثال: مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٢ سم احسب حجمه ومساحته الجانبية ومساحته الكلية (عند π = ٣,١٤)



حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع = ($\frac{1}{3}$) (٣,١٤) (٥)^2 (١٢) = ٣١٤ سم^3

مساحته الجانبية = π نق ل

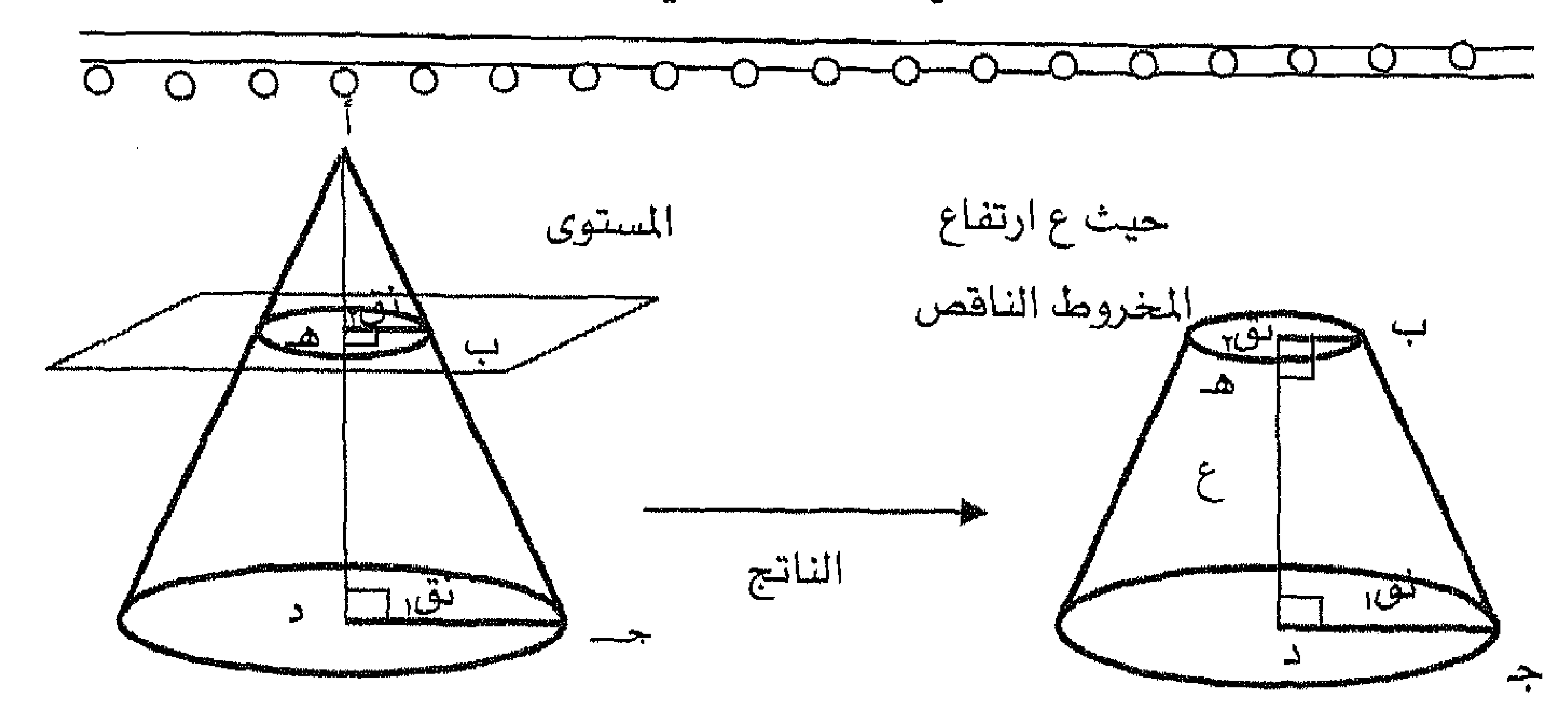
حيث ل = ١٣ سم من فيثاغورس

= (٣,١٤) (٥) (١٣) = ٢٠٤,١ سم^2

مساحته الكلية = الجانبية + مساحة قاعدته

= (٢٠٤,١) + ٧٨,٥ = ٢٨٢,٦ سم^2

وهناك المخروط الناقص المتوازي القاعدتين والناتج عن قطع مخروط دائري قائم بمستوى يوازي قاعدته شرط أن يكون المقطع الحادث دائرة نصف قطرها أصغر من نصف قطر قاعدة المخروط كما في الشكل.



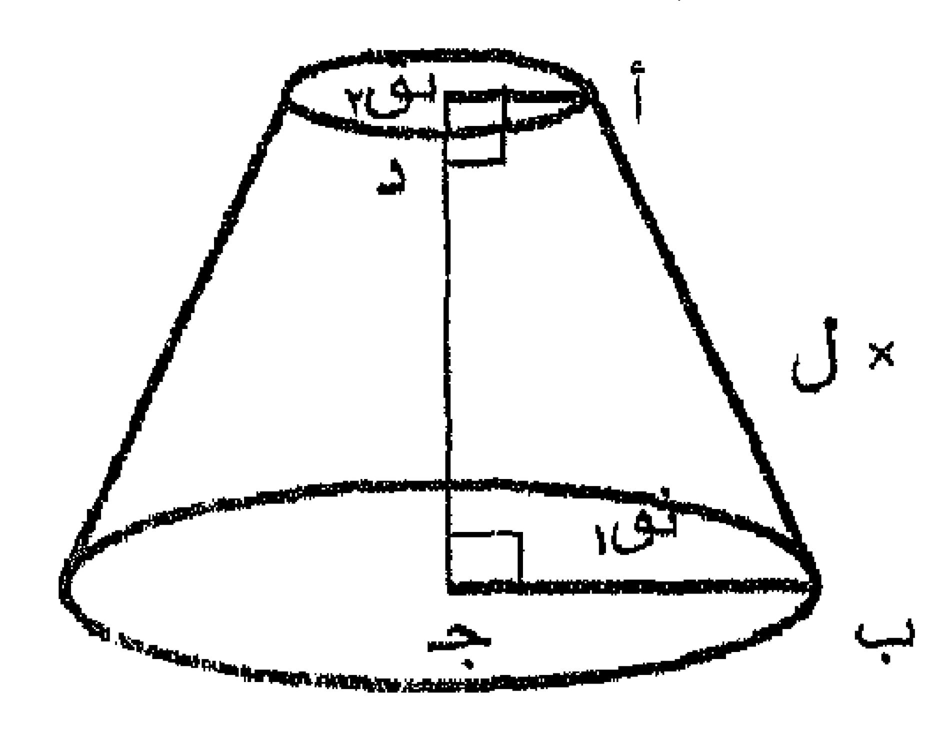
وبإيجاز شديد ودون برهان نستطيع القول أن:

(١) حجم المخروط الناقص = $\frac{1}{3}$ π ع (نق$_1$ ^{2} + نق$_1$نق$_2$ + نق$_2$ ^{2})

حيث: ع ارتفاعه

نق$_1$، نق$_2$ نصفا قطري قاعدتيه كما في الشكل السابق.

(٢) أما مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ مجموع محيطي القاعدتين × الراسم كما في الشكل



«حيث ل الراسم»

أي أن مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ {٢ نق π + ٢ نق$_2$ π} × ل

وكأن سطح المخروط الناقص شبه منحرف

ارتفاعه الراسم ل

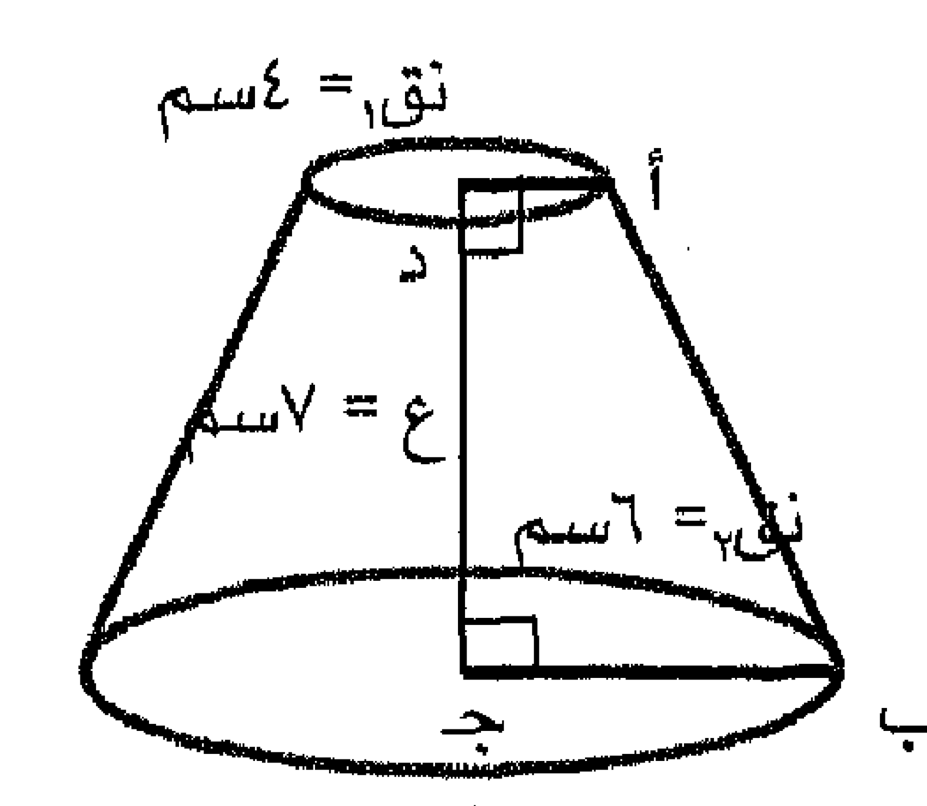
(٣) وأما مساحتها الكلية = مساحته الجانبية + مساحتي القاعدتين

= مساحته الجانبية + (نق$_1$ ^{2} π + نق$_2$ ^{2} π)

⇦ مثال: مخروط دائري قائم ناقص، نصفا قاعدتيه ٤سم، ٦سم وارتفاعه ٧ سم أوجد حجمه ومساحته الكلية أيضاً باعتبار π = $\frac{٢٢}{٧}$.

الحل:

حجم المخروط الناقص = $\frac{1}{3}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ (٤ ^{2} + (٤ × ٦) + ٦ ^{2})



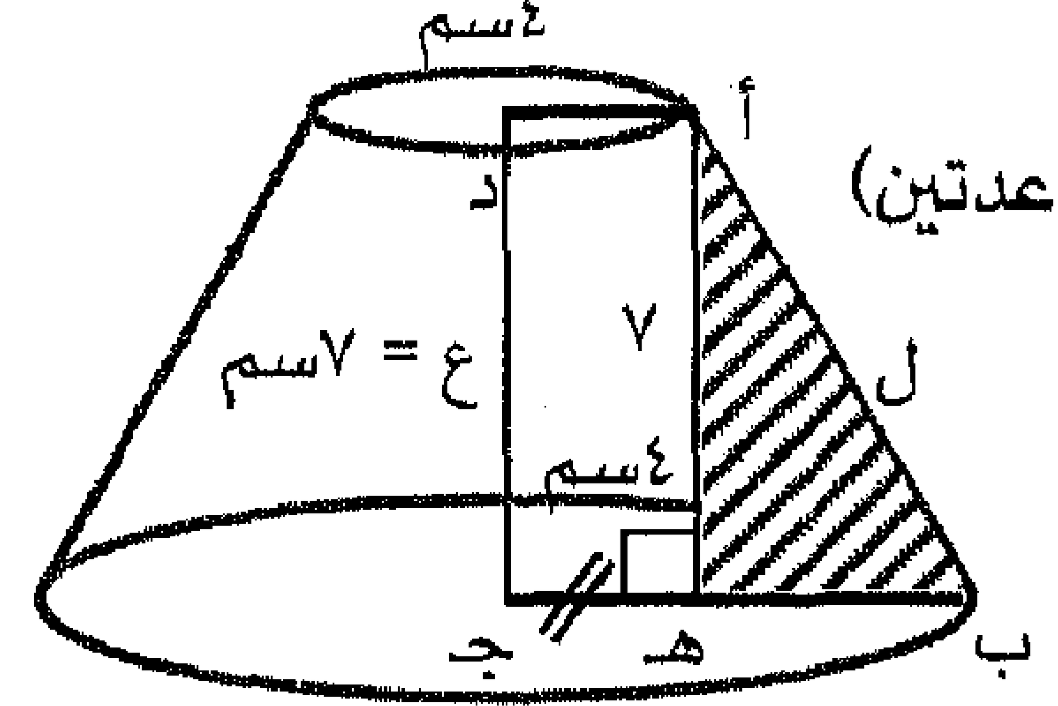
$= \frac{٢٢}{٣} \{١٦ + ٢٤ + ٣٦\} = \frac{٢٢}{٣} \times ٧٦$

$= \frac{١٦٧٢}{٣} = ٥٥٧,٣٣$ سم^{٣}

مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ {٢ نق π + ٢ نق$_{٢}$ π} × ل

نجد طول الراسم ل هكذا.

المثلث أ هـ ب قائم الزاوية فيه



ب هـ = ٦ – ٤ = ٢سم (الفرق بين نصفي قطري القاعدتين)

أ هـ = ٧ سم الارتفاع.

لكن ل^{٢} = (٢)^{٢} + (٧)^{٢} فيتاغورس

= ٤ + ٤٩ = ٥٣

∴ ل = $\sqrt{٥٣}$ = ٧,٢٨ سم.

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ {٢ (٤) ($\frac{٢٢}{٧}$) + ٢ (٦) ($\frac{٢٢}{٧}$)} × ٧,٢٨

= ($\frac{١}{٢}$) (٧,٢٨) ($\frac{٢٢}{٧}$) (٢٠)

= ٢٢٨,٥٩ سم^{٢}

مساحتها الكلية = الجانبية + (نق$_{١}^{٢}$ π + نق$_{٢}^{٢}$ π)

= ٢٢٨,٥٩ + (٤^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ + ٦^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$)

= ٢٢٨,٥٩ + $\frac{٢٢}{٧}$ (١٦ + ٣٦)

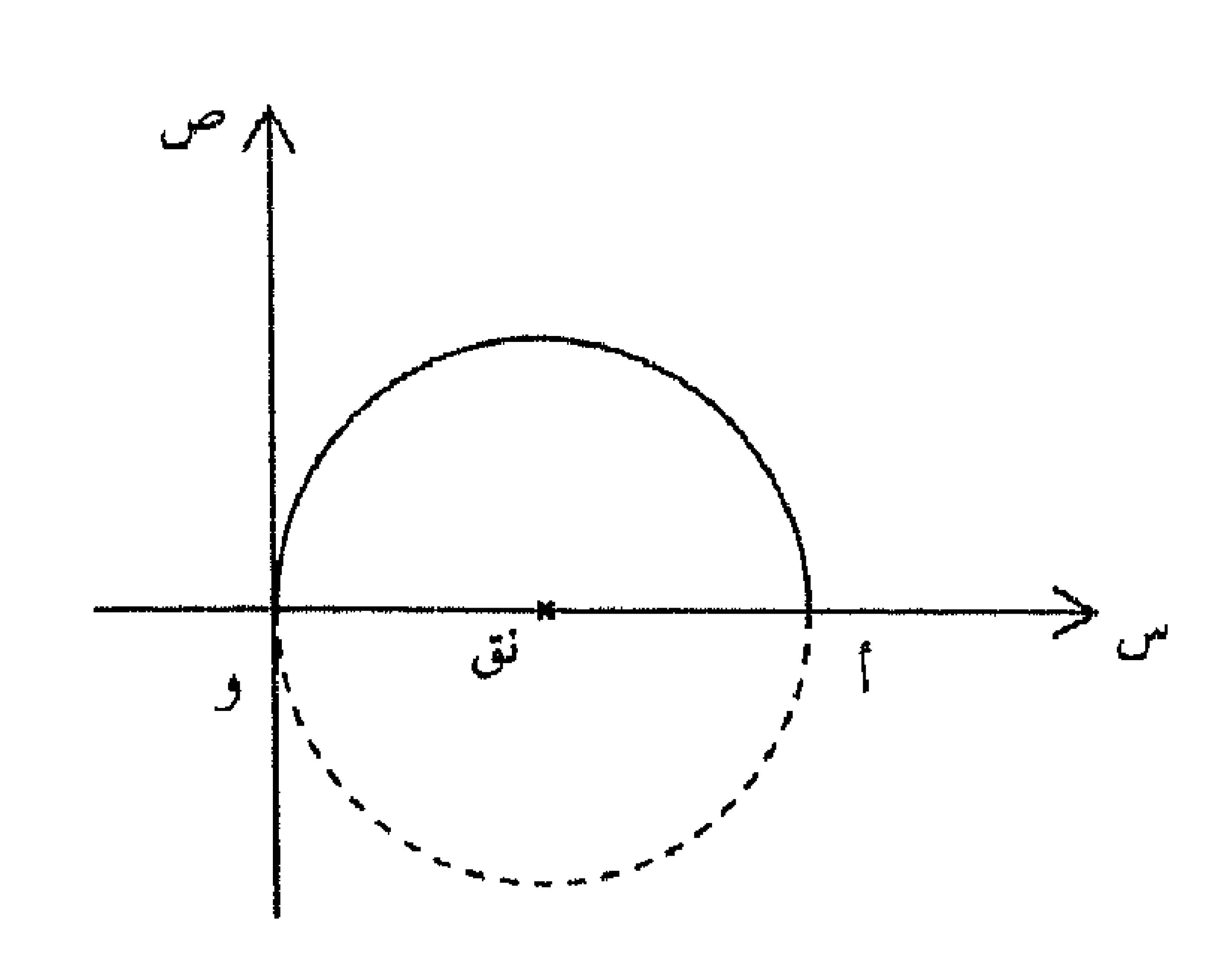
= ٢٢٨,٥٩ + $\frac{٢٢}{٧}$ (٥٢)

= ٢٢٨,٥٩ + ١٦٣,٢٨

= ٣٩١,٨٧ سم^{٢}.

سابعاً الكرة Sphere

الكرة جسم (مجسم) دوراني ناشئ عن دوران نصف دائرة في الفضاء دورة كاملة حول قطرها وكأنه مجسّم غير ثلاثي الأبعاد إذ لايشاهد له لا طول ولا عرض ولا ارتفاع كون أبعاده تظهر له كأقطار كما في الشكل.



فالكرة هنا نشأت من دوران نصف الدائرة حول قطرها أ و المنطبق على محو السينات دورة كاملة.

وأما بلغة المحل الهندسي هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء بحين يكون بعدها عن أي نقطة ثانية تسمى المركز يساوي مقداراً ثانياً سمي نصف قطر الكرة.

والجدير بالذكر أن فيتاغورس (٥٧٢ ـ ٤٩٧) ق.م كان يرى ـ وهو محق بما كان يرى ـ أن الكرة أكثر الأشكال جمالاً وتنبأ آنذاك بأن الأرض والشمس لابد أن تكونا كرويتي الشكل بجمالهما الأخاذ حسب رأيه.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ π

مساحة سطحها = ٤ نق^٢ π

⇦ مثال: ما حجم كرة نصف قطرها ١٤ سم وما مساحة سطحها اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجمها = $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ π = ($\frac{٤}{٣}$) (١٤)^٣ ($\frac{٢٢}{٧}$)

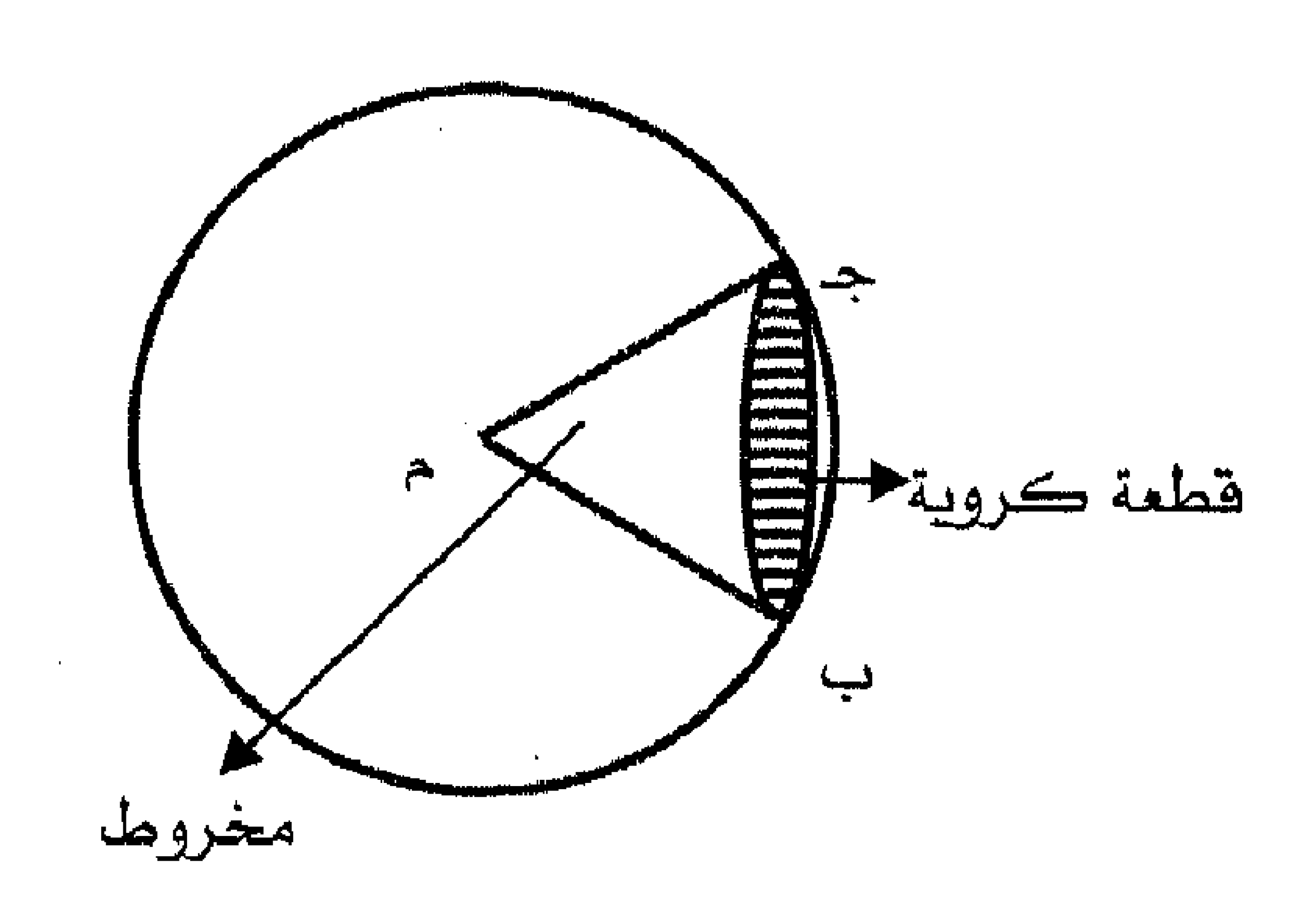
= $\frac{٤}{٣}$ × ١٤ × ١٤ × ١٤× $\frac{٢٢}{٧}$

= ١١٤٩٨,٦٦٦ سم^٣

مساحة سطحها = ٤ نق^٢ π = ٤ × ١٤ × ١٤ × ١٤× $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢٤٦٤ سم^٢

■ **وهناك القطاع الكروي** Spherical Sector **والقطعة الكروية** Segment

والقطاع الكروي يرتبط بالكرة وينشأ من دوران قطاع دائري حول أحد نصف قطريه دورة كاملة في الفضاء كما في الشكل.



وهو مكون من مخروط وقطعة كروية كما في الشكل

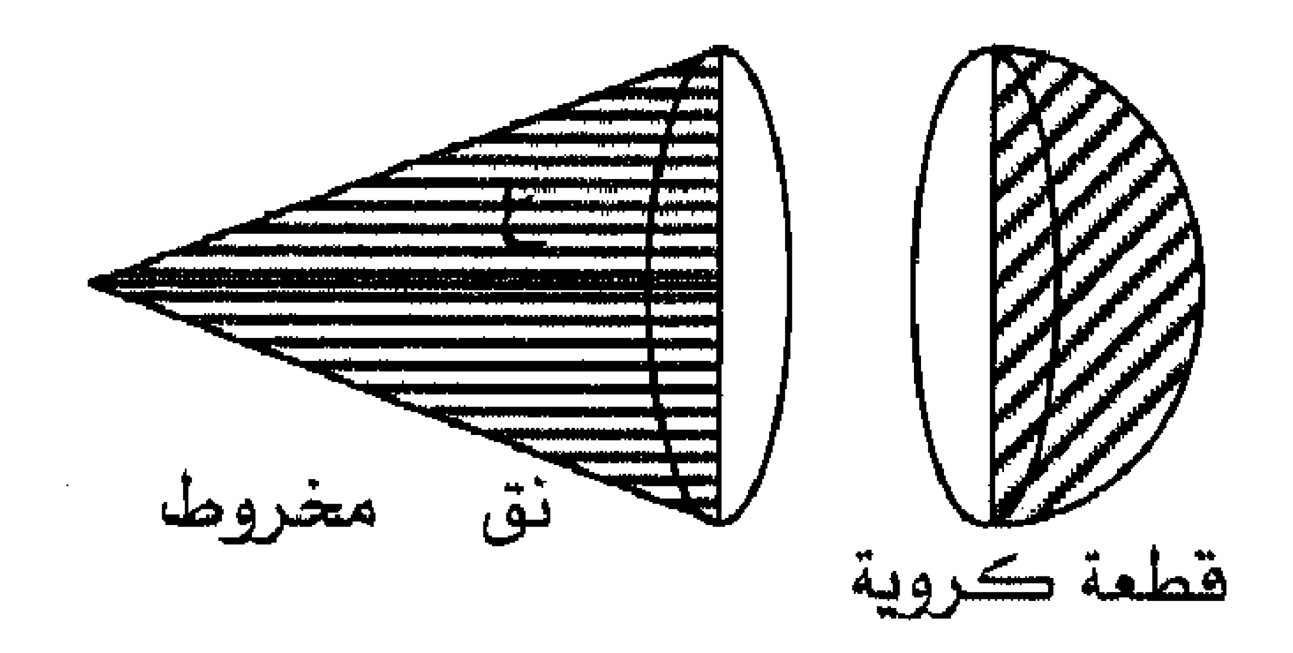
حجم القطاع الكروي

$= \frac{٢}{٣} \pi$ نق^٢ ع

حيث نق نصف قطر دائرته، ع ارتفاعه

حجم القطعة الكروية = $\frac{١}{٣} \pi$ ع^٢ (٣ نق – ع)

حيث ع ارتفاعها، نق نصف قطر كرتها.



⇦ مثال: كرة نصف قطرها ٥ سم أوجد

(١) حجم القطعة الكروية التي ارتفاعها ٧ سم

(٢) حجم القطاع الكروي الذي ارتفاعه ٣,٥ سم

اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

الحل: حجم القطعة الكروية = $(\frac{١}{٣})(\frac{٢٢}{٧})(٧)^٢(٣ \times ٥ - ٧)$ = ١٥٤ سم^٣

حجم القطاع الكروي = $\frac{٢}{٣}(\frac{٢٢}{٧})(٥)^٢(٣,٥)$ = ١٠٣,٣٣ سم^٣

وهناك أيضاً مُعامل التغير:

إنه عدد حقيقي موجب مغاير للواحد الصحيح وبالرموز، معامل التغير $\in$ ح$^+$ ـ {١} يرتبط بالكرة بالذات، عندما تُحول الكرة من حجم إلى آخر بالتصغير أو التكبير.

فإذا أردنا تصغير أو تكبير نصف قطر كرة فإن حجمها تبعاً لذلك يتغير، من هنا برز معنى مُعامل التغير هكذا:

عند مد نصف قطر كرة أو تقليصه من نق إلى أ نق حيث أ معامل التغير (تكبير أو تصغير) فإننا نلاحظ من الجدول التالي كيف يؤثر معامل التغير في حجم الكرة ومساحة سطحها:

طول نصف الكرة سم	حجم الكرة سم^3	مساحة سطح الكرة سم^2
نق	$\frac{4}{3}$ π نق^3	٤ π نق^2
أ نق	($\frac{4}{3}$ π نق^3) (أ^3)	(٤ π نق^2) (أ^2)

فكأن حجم الكرة بعد التغير قد ضُرب بالمعامل أ^3 ← (معامل التغير)^3

وكأن مساحة سطح الكرة بعد التغير قد ضرب بالمعامل أ^2 ← (معامل التغير)^2

⇦ مثال: قطعة جليد على شكل كرة بالتحديد حجمها ٢٥٠٠٠ سم^3 بدأت بالانصهار محافظة على شكلها الكروي، ما حجمها عندما يتقلص قطرها إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية (عند بداية عملية الانصهار)

الحل:

بما أن قطر الكرة تقلص إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية، فإن نصف قطرها أيضاً يتقلص إلى $\frac{2}{5}$ قيمته الأصلية.

∴ معامل التغير = $\frac{٢}{٥}$

حجم الكرة يُصبح مساوياً حجمها الأصلي × (معامل التغير)^{٣}

= ٢٥٠٠٠ × $(\frac{٢}{٥})^{٣}$

= ٢٥٠٠٠ × $(\frac{٨}{١٢٥})$ = ١٦٠٠ سم^{٣}

«هذا المثال يوضح تأثير معامل التغير على الحجم»وأما تأثير معامل التغير على المساحة فيوضحه المثال التالي:

⇦ مثال: ينتج مصنع ألعاب كراتٍ من البلاستيك قطر كل منها ٤٠ سم تم ـ لظروف خاصة ـ تقليص القطر إلى $\frac{٤}{٥}$ القطر الأصلي.

كم يوفر المصنع في عملية التقليص هذه من المادة الخام عند صنع كل كرة من الكرات؟

الحل:

بما أن القطر يتقلص إلى $\frac{٤}{٥}$ فإن نصف القطر أيضاً يتقلص إلى $\frac{٤}{٥}$

∴ مُعامل التغير = $\frac{٤}{٥}$

مساحة سطح الكرة الأصلي = ٤ نق^{٢} π

علماً بان نصف القطر = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ سم

= ٤ (٢٠) (٢٠) π = ١٦٠٠ π سم^{٢}

= ١٦٠٠ π × $(\frac{٤}{٥})^{٢}$

= ١٦٠٠ π × $\frac{١٦}{٢٥}$ = ١٠٢٤ π سم^{٢}

∴ كمية المادة المتوفرة عند صنع كل كرة

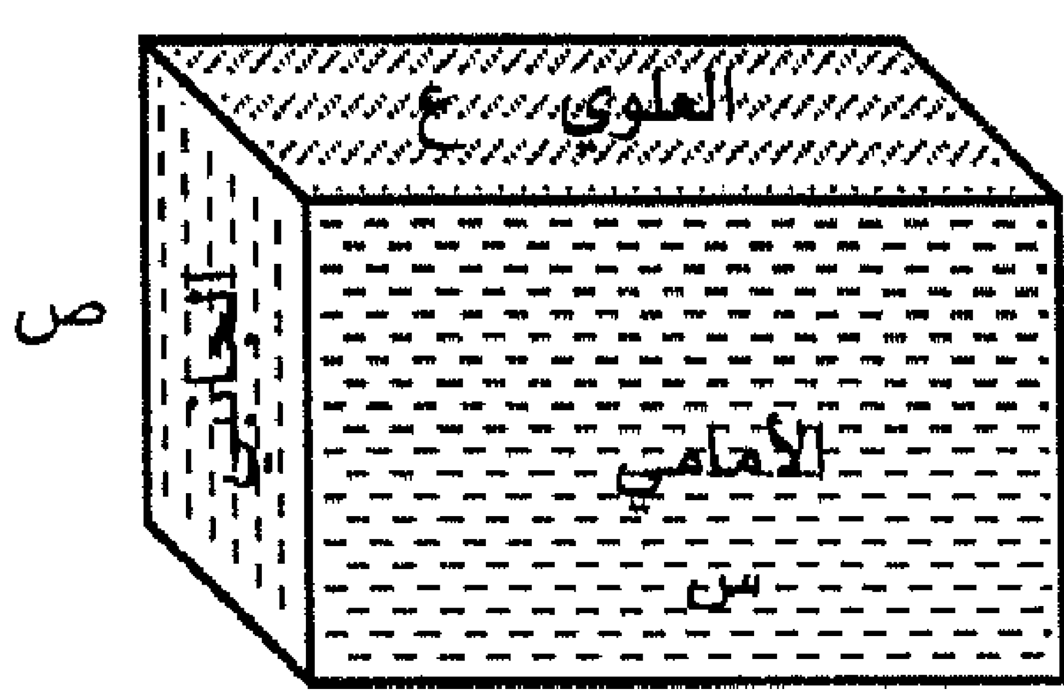
= ١٦٠٠ π ـ ١٠٢٤ π

= ٥٧٦ π سم^{٢}

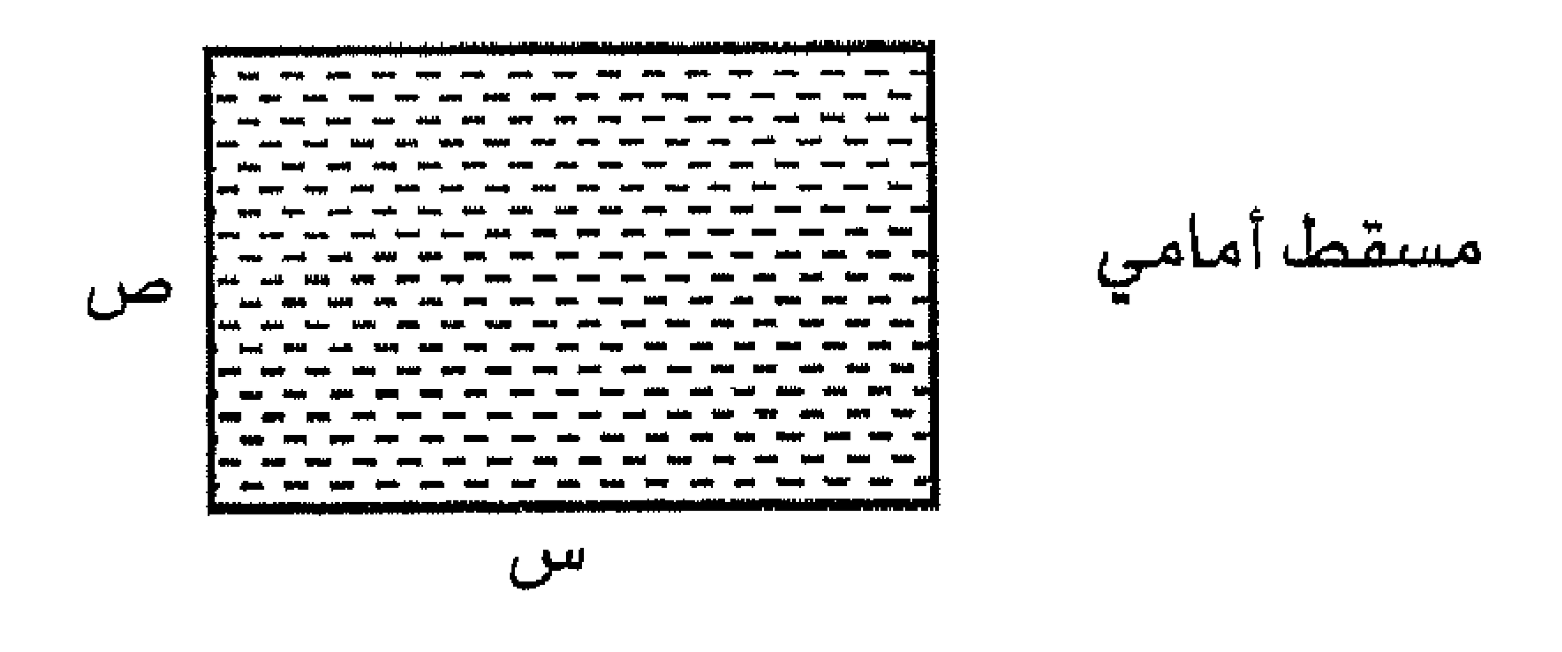
وأخيراً لا بُد مناقشة هذا المفهوم المرتبط بالمجسمات ارتباطاً وثيقاً، ألا وهو الإسقاط العمودي.

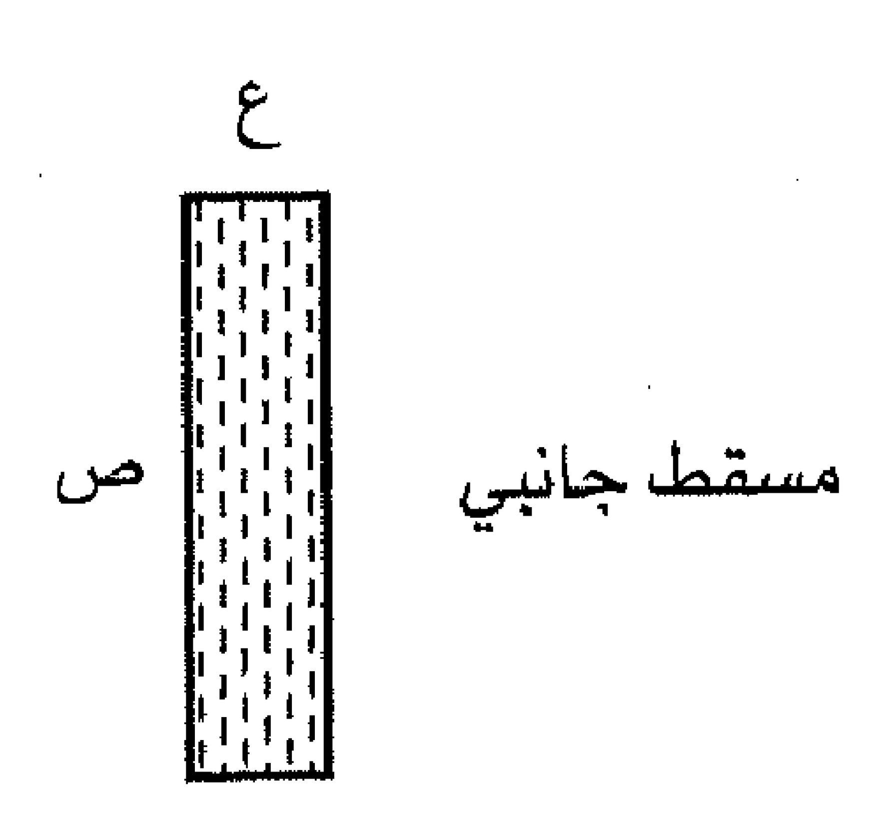
يُعتبر الإسقاط العمودي طريقة لرسم المجسمات الظاهر منها وغير الظاهر على السواء.

فمتوازي المستطيلات على سبيل المثال والذي أبعاده س، ص، ع فيظهر عند رسمه على الورق كما في الشكل.



وأما مساقطه منفردة فتظهر مستطيلات وكما في الأشكال التالية:



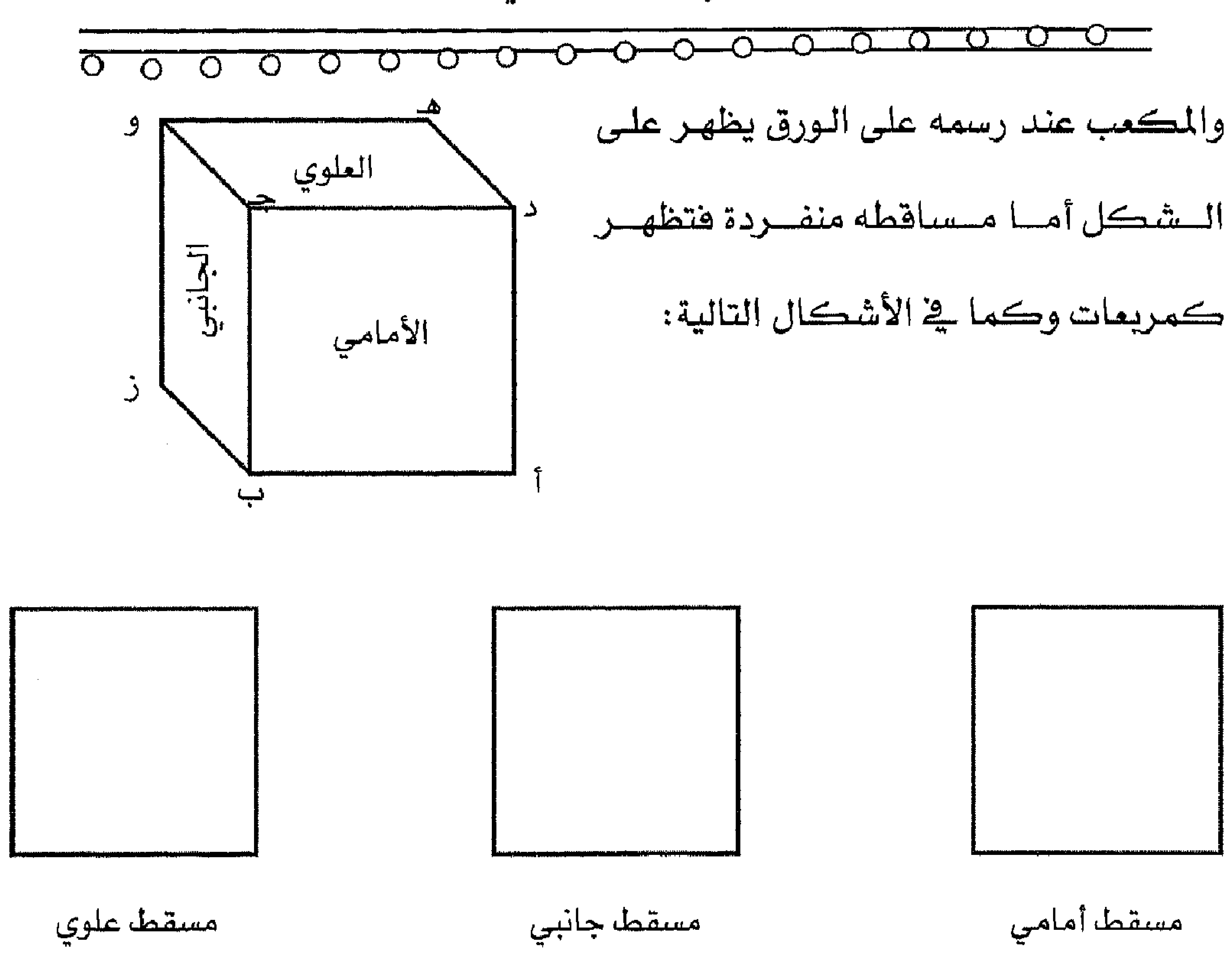


س

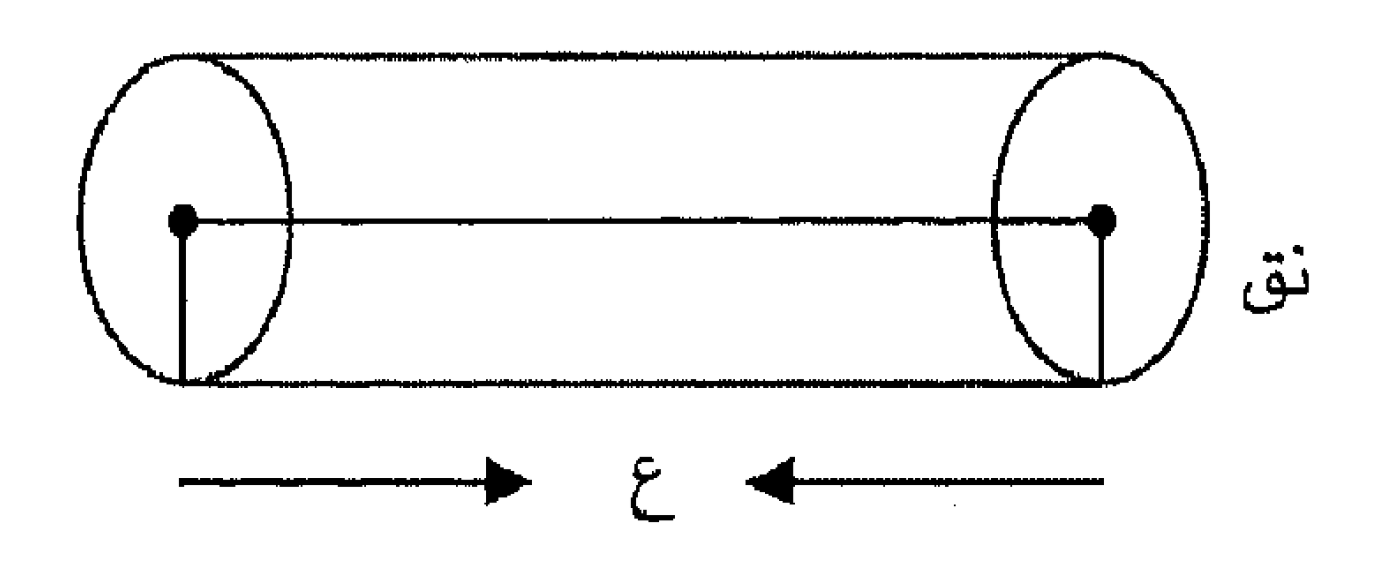
مسقط علوي

ع

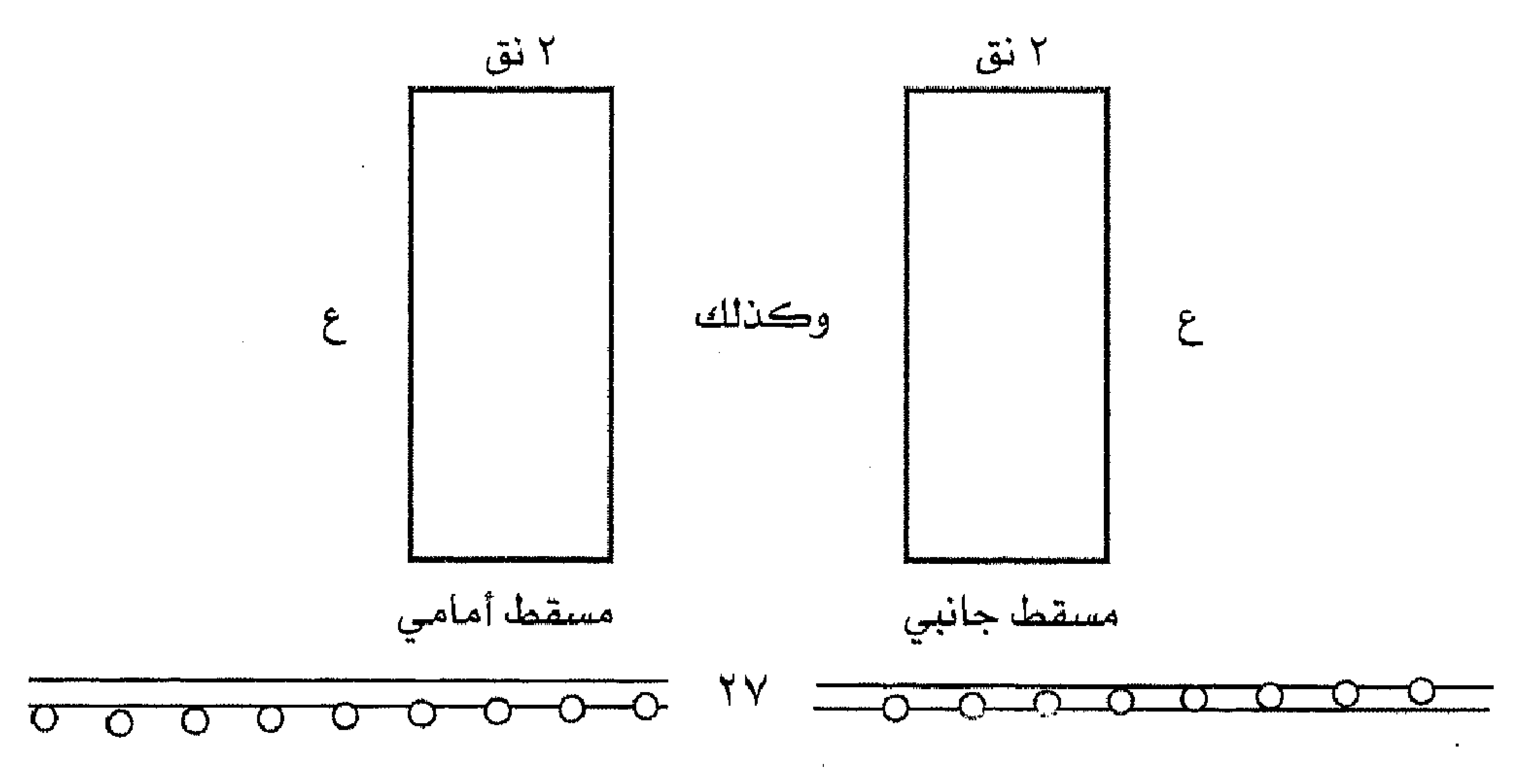
والمكعب عند رسمه على الورق يظهر على الشكل أما مساقطه منفردة فتظهر كمربعات وكما في الأشكال التالية:

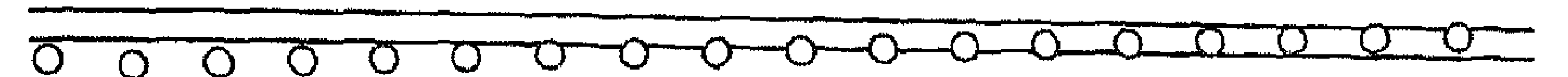


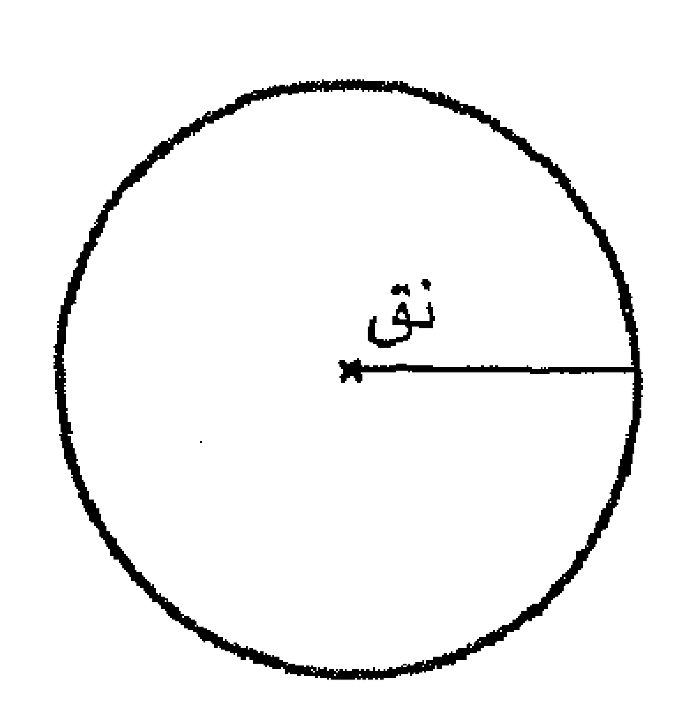
وأما الأسطوانة القائمة فتظهر عند رسمها على الورق كما في الشكل



ومساقطها تظهر كمستطيلات ودائرة كما في الأشكال:

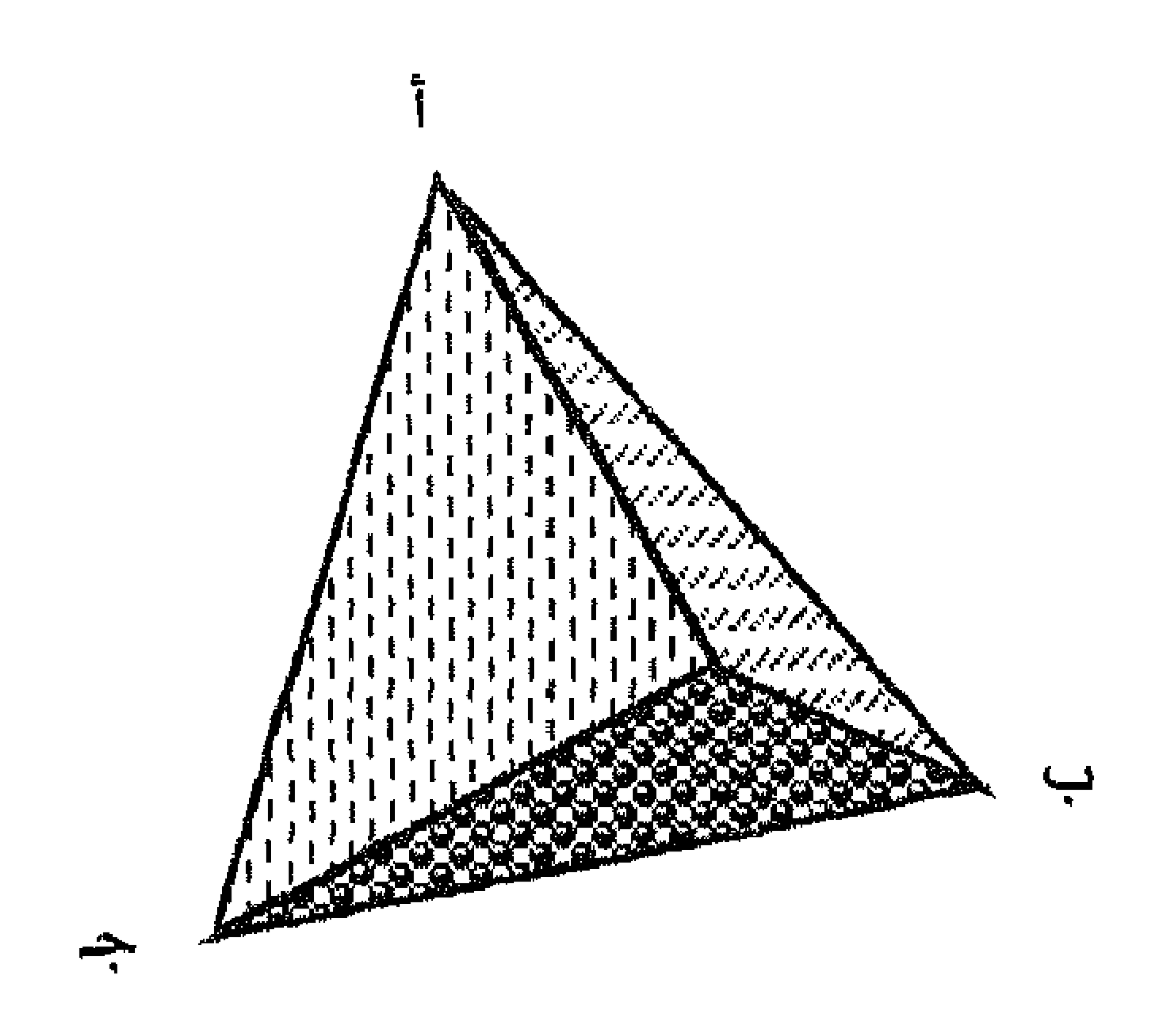






مسقط علوي للإسطوانة

وأخيراً الهرم يظهر عند رسمه على الورق كما في الشكل



«وبهذا القدر نكتفي»

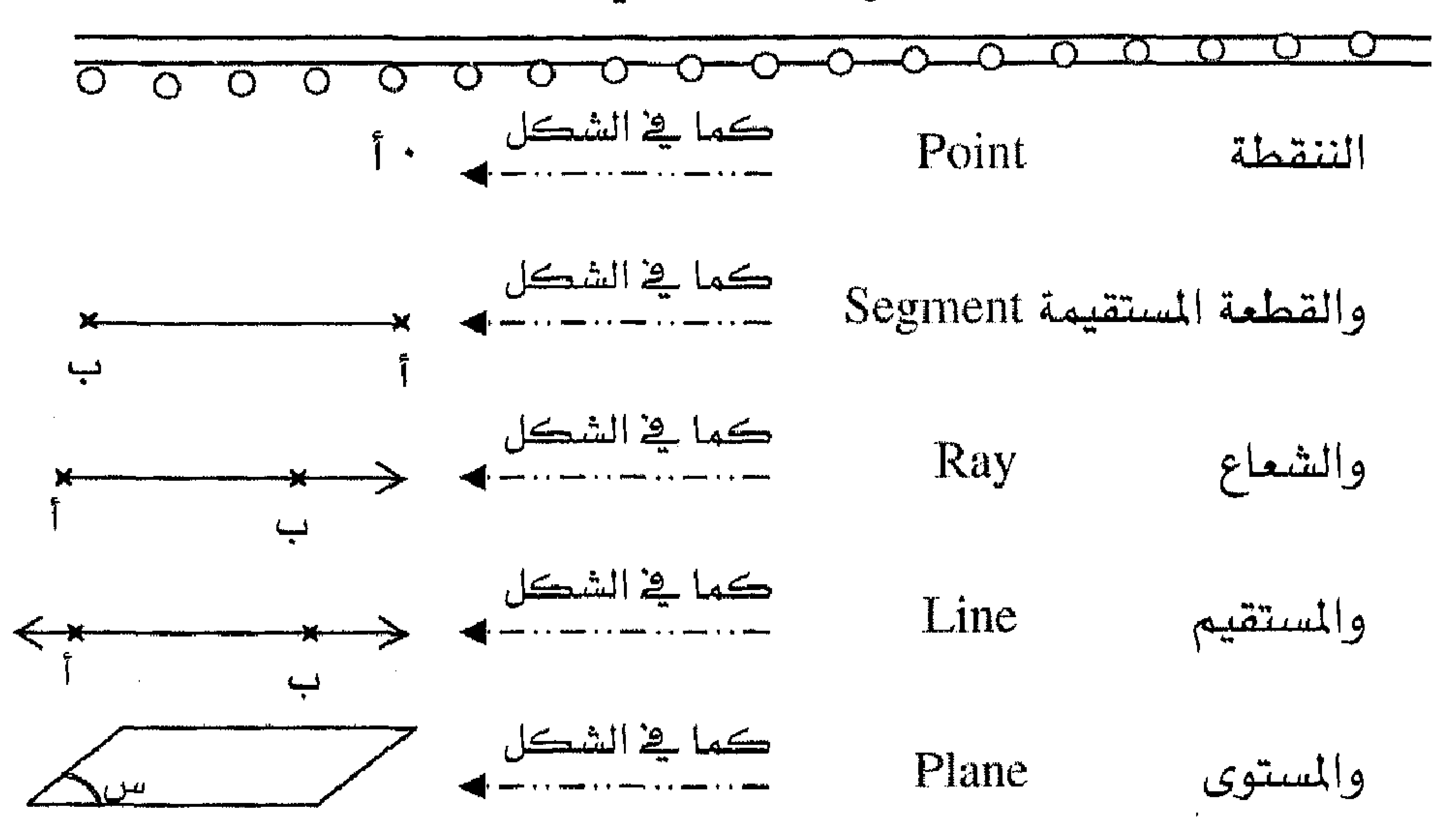
كون موضوع الإسقاط العمودي بالذات هو من اختصاص الفنانيين والرساميين بشكل خاص!!!

تُبنى الهندسة الفضائية كسائر الهندسات الأخرى من مُسميات ومسلمات ونظريات.

سنناقشها بإيجاز شديد:

(١٤ ـ ٢) المُسميات Notions

إنها المفردات التي لا نعطيها تعريفات بل نفهمها كما يفهمها الآخرون بلا مقدمات ولا تفسيرات كونها الأوليات في الرياضيات مثل:



مع الملاحظة أنه مر نقاشها فيما سبق لذا لا فائدة من تكرار نقاشها هنا، وتستخدم هذه المسميات كأساس لتعريف مفاهيم هندسية أخرى هي:

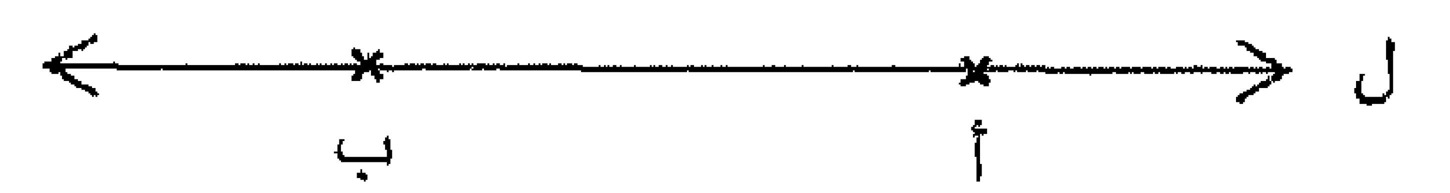
(١٤ ـ ٣) المُسلمات Ayioms

إنها الحقائق التي يؤخذ بصحتها دون براهين أو إثباتات كونها البديهيات التي تعتمد على مفردات أولية لا تحتاج إلى تعريفات لإنها مُسميات أو أوليات كما مر أعلاه.

وكلمة مُسلمة تستخدم للدلالة على حقيقة هندسية تكون من البساطة بحيث يمكن افتراض صحتها دون إثبات مثل:

«مسلمة»

يمكن رسم مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطتين معلومتين، والتوضيح كما في الشكل.



وهذا صحيح كون كل مستقيم آخر غير $\overleftrightarrow{ل}$ يمر بالنقطتين أ، ب لابد من أن ينطبق على المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ وكأنه هو نفسه.

وقديماً قال أرسطو (٣٨٤ ـ ٣٢١) ق. م

«كل علم» من العلوم يجب أن ينشأ أولاً من مبادئ غير مبرهنة، وإلاّ فإن خطوات البرهان سوف لا تنتهي إطلاقاً، وهذه المبادئ هي المسلمات.

وفي كتاب الأصول لاقليدس (٣٢٥ ـ ٢٦٥) ق. م

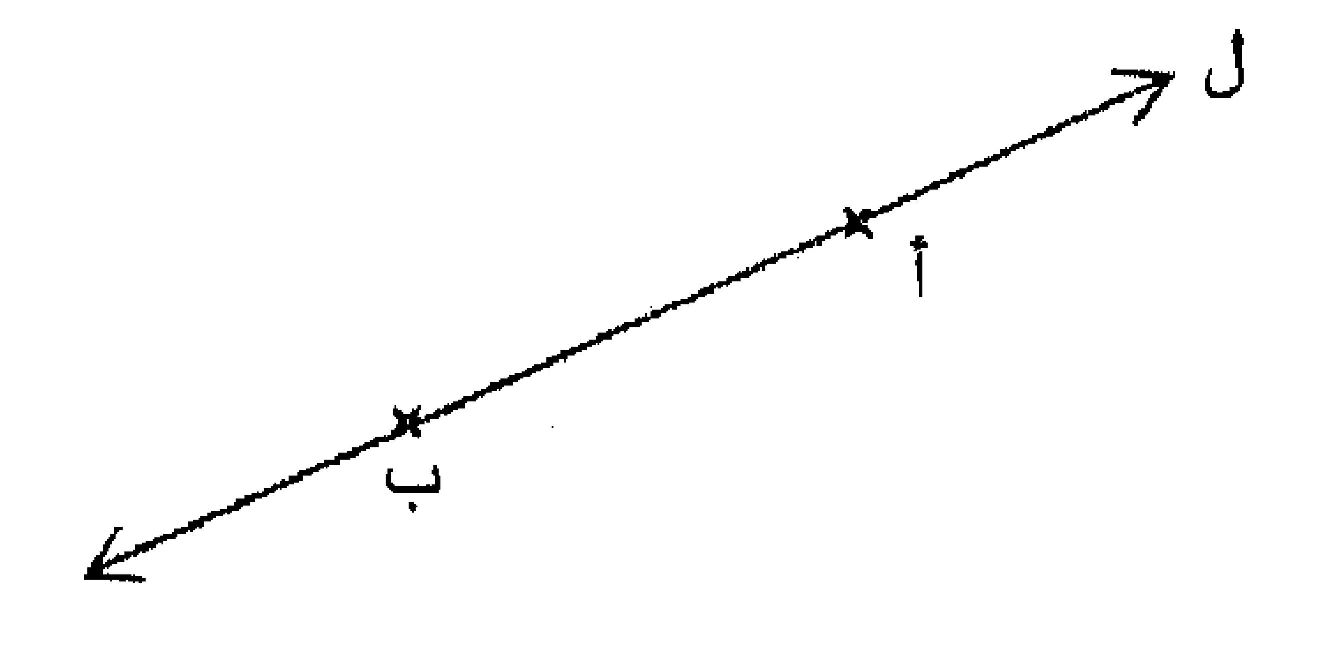
ورد ذكر المفاهيم العامة التي أطلق عليها اسم المسلمات لا مجال لذكرها هنا.

سنورد فيما يلي أهم مسلمات الهندسة الفضائية مع التوضيح بالرسم قدر الإمكان، علماً بأن الفضاء كمفهوم رياضي هو مجموعة غير منتهية من النقط، يضم المستقيمات والمستويات والمجسمات مركز اهتمام الهندسة الفضائية:

مسلمة "١"

«أي نقطتين في الفضاء لا يمر بهما إلاّ مستقيم واحد فقط»

كما في الشكل:



مسلمة "٢"

«إذا تقاطع مستقيمان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، والمستقيمان المختلفان هما المستقيمان الواقعان في مستويين مختلفين».

لاحظ الشكل المجاور:

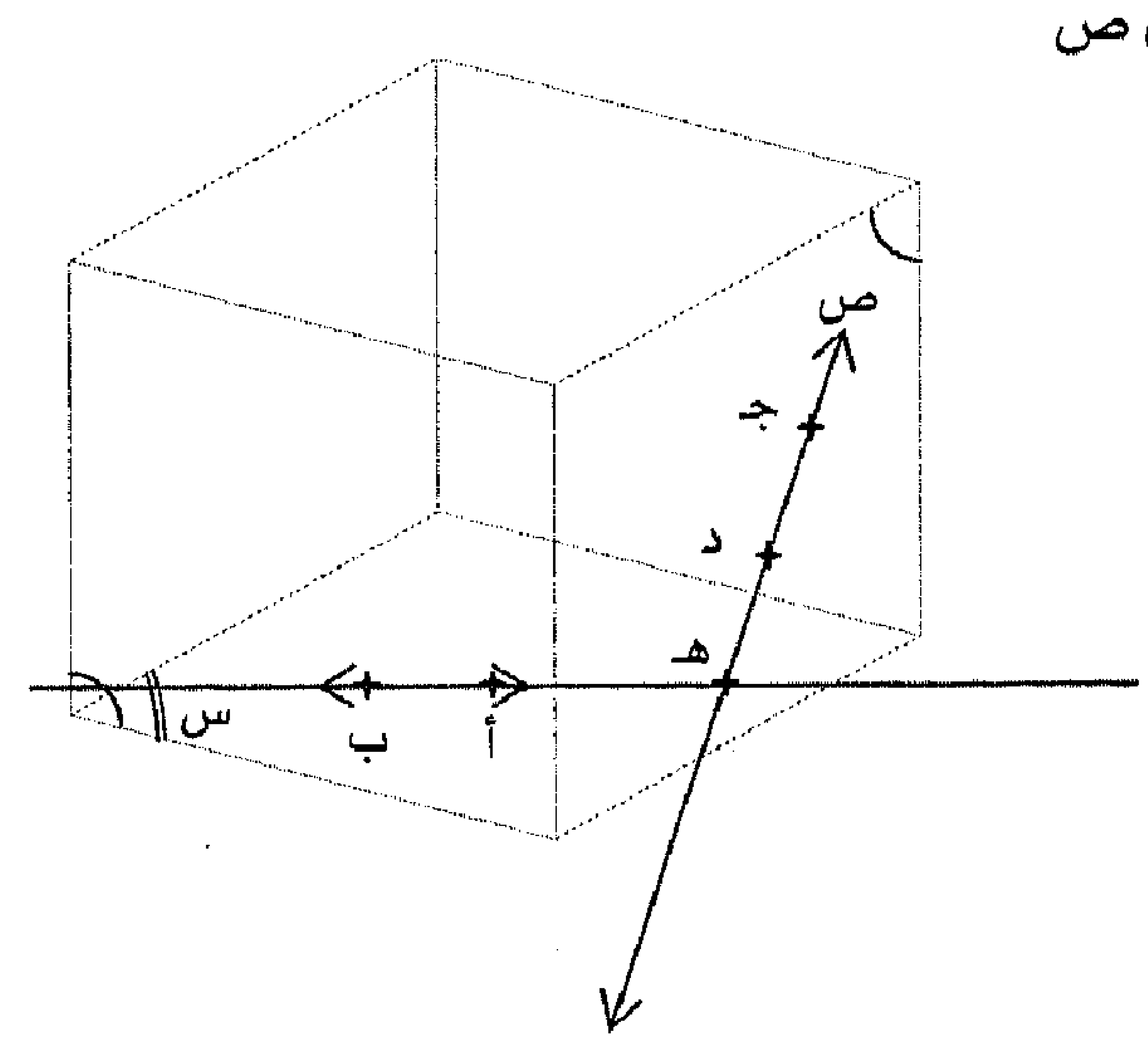
إن المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مختلفين

كون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقع في المستوى س

و: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقع في المستوى ص

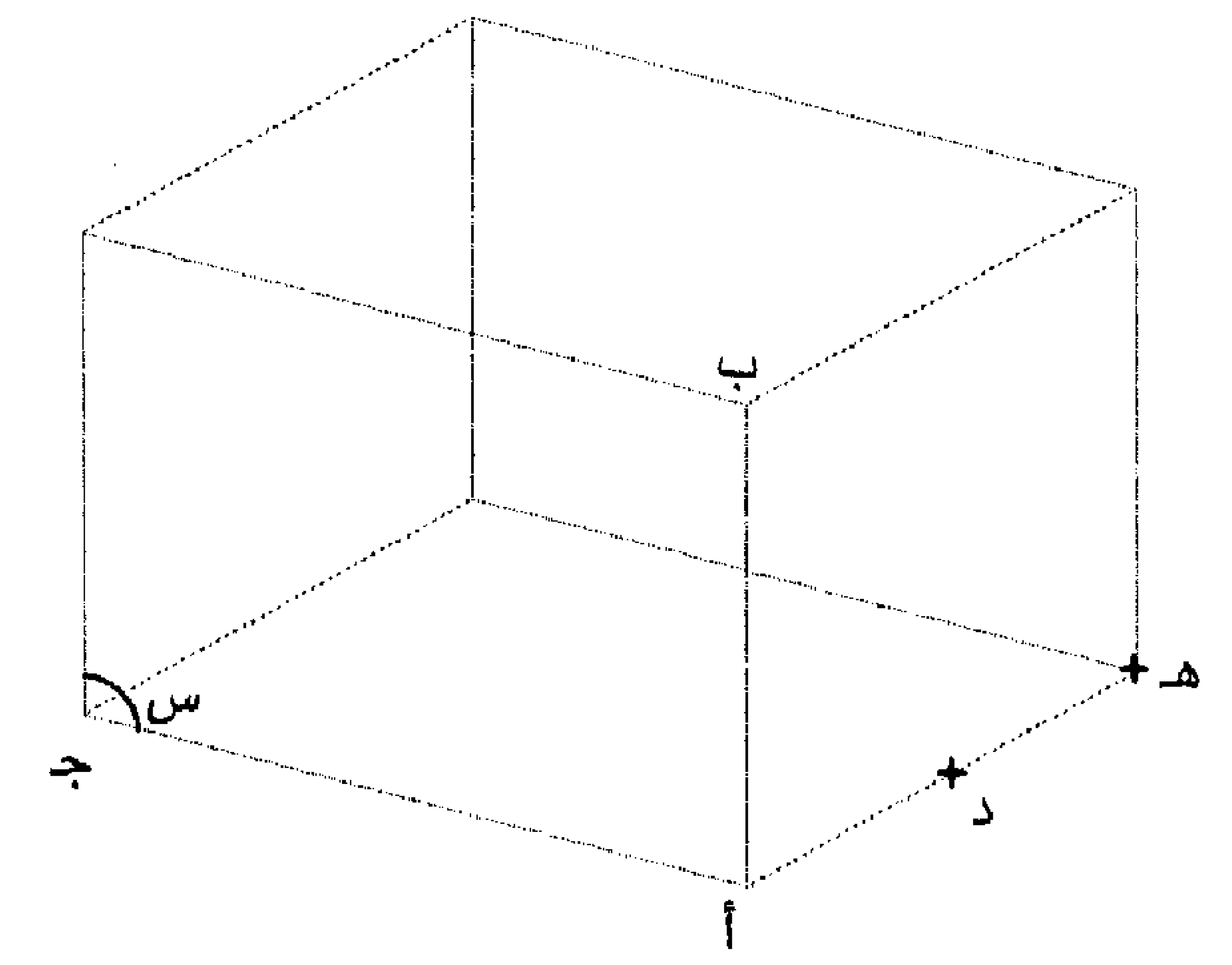
ويتقاطعان في النقطة هـ

أي ان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = هـ



مسلمة "٣"

«يوجد لأي ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة مستوى واحد فقط يحتويها»

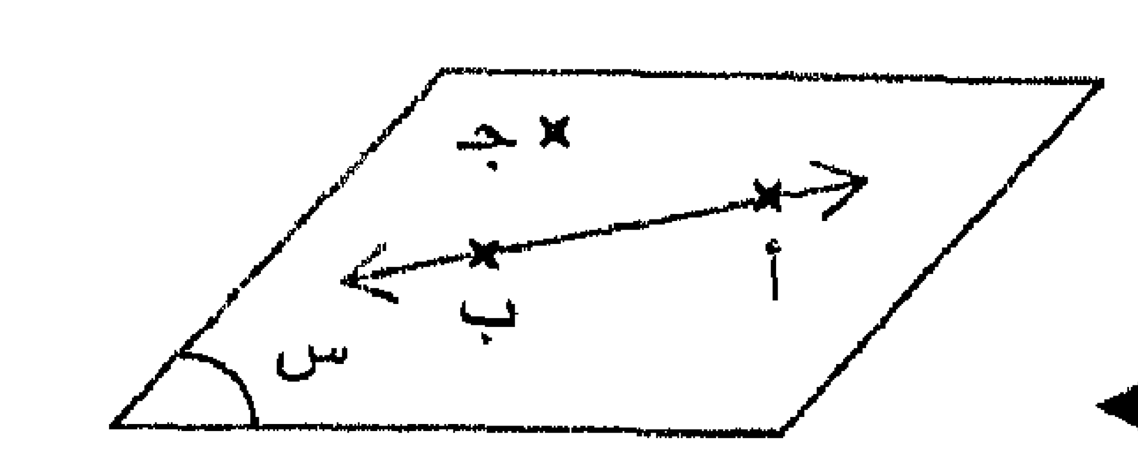


لاحظ الشكل المجاور

النقط أ ، ب، جـ غير مستقيمة كونها لا تقع على مستقيم واحد ، لذا فإنه يحتويها المستوى س.

بينما النقط أ ، د ، هـ نقط مستقيمة كونها تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ فلا يحتويها واحد فقط لأنها تقع في المستوى أ جـ هـ والمستوى أ ب هـ معاً.

واعتماداً على هذه المسلمة بالذات فإن المستوى يتعين بإحدى حالات ثلاث هي:



الحالة الأولى: مستقيم ونقطة خارجه كما في الشكل ←

كون النقط أ، ب، جـ ثلاث نقط غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى س.

الحالة الثانية: مستقيم ونقطة خارجه كما في الشكل ←

حيث النقط أ، هـ، د غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى ص.

وكذلك النقط د، هـ، ب غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى ص نفسه.

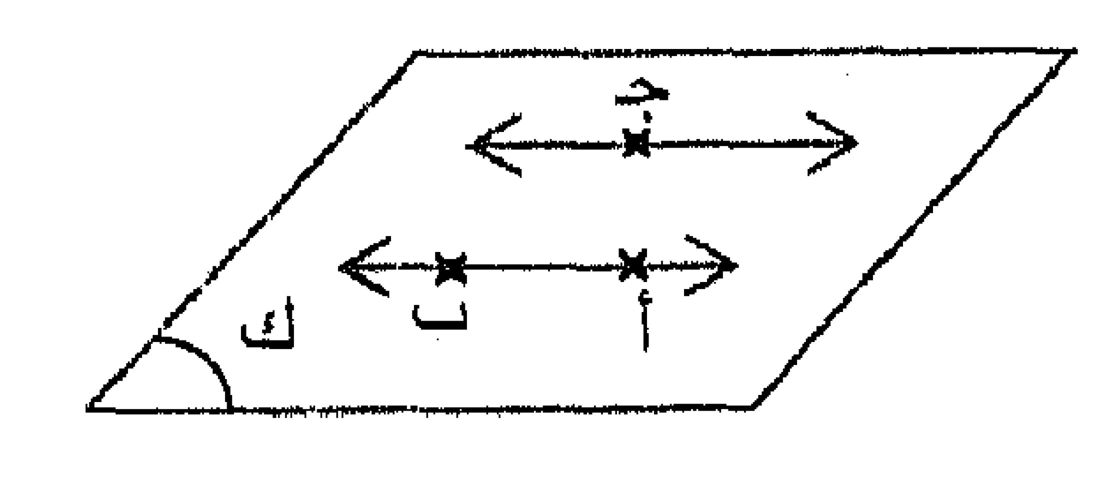
الحالة الثالثة: مستقيمين متوازيين كما في الشكل ←

حيث أ، ب، جـ ثلاث نقط غير مستقيمة (المسلمة) لذا فإنها تعين المستوى ع.

وكذلك النقط جـ، د، أ وكذلك النقط أ، د، ب وهكذا.

«فكل من الحالات تفرز ثلاث نقط غير مستقيمة لذا فإنها تعين مستوى وحيد في الفضاء»

مسلمة "٤"



«من خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم وحيد يوازيه» كما في الشكل.

كون المستوى يحتوي النقط الثلاث أ ، ب، جـ والمستوى لا بداية لـه ولا نهايـة مثل المستقيم بالضبط.

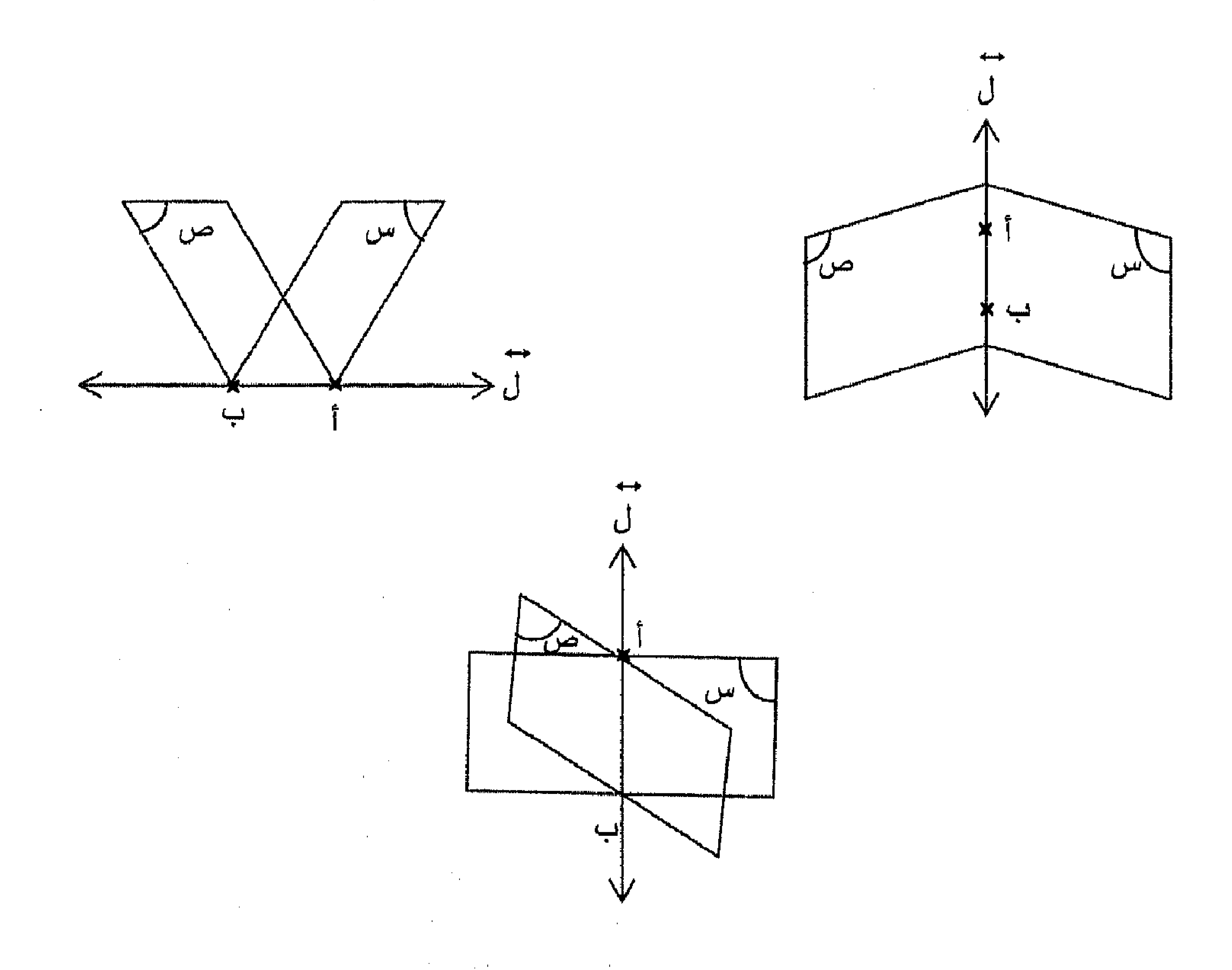
مسلمة "٥"

«إذا وضـعت نقطتـان في مـستوى، فـإن المستقيم الذي يحويهما يقع في المستوى نفسه»

فالمستوى ل يحوي المستقيمين أ هـ ، جـ د

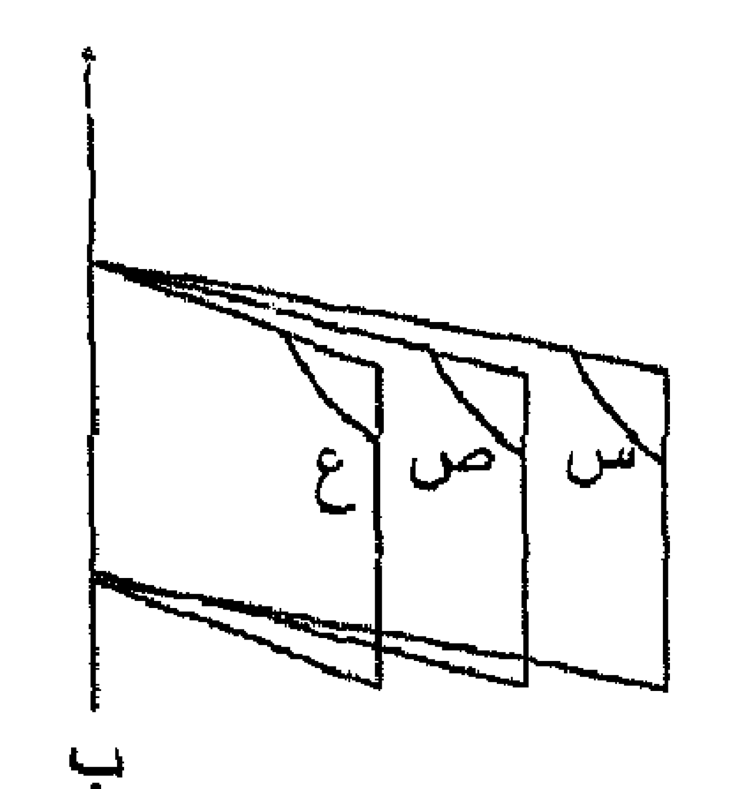
مسلمة "٦"

«إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم كما في الأشكال:

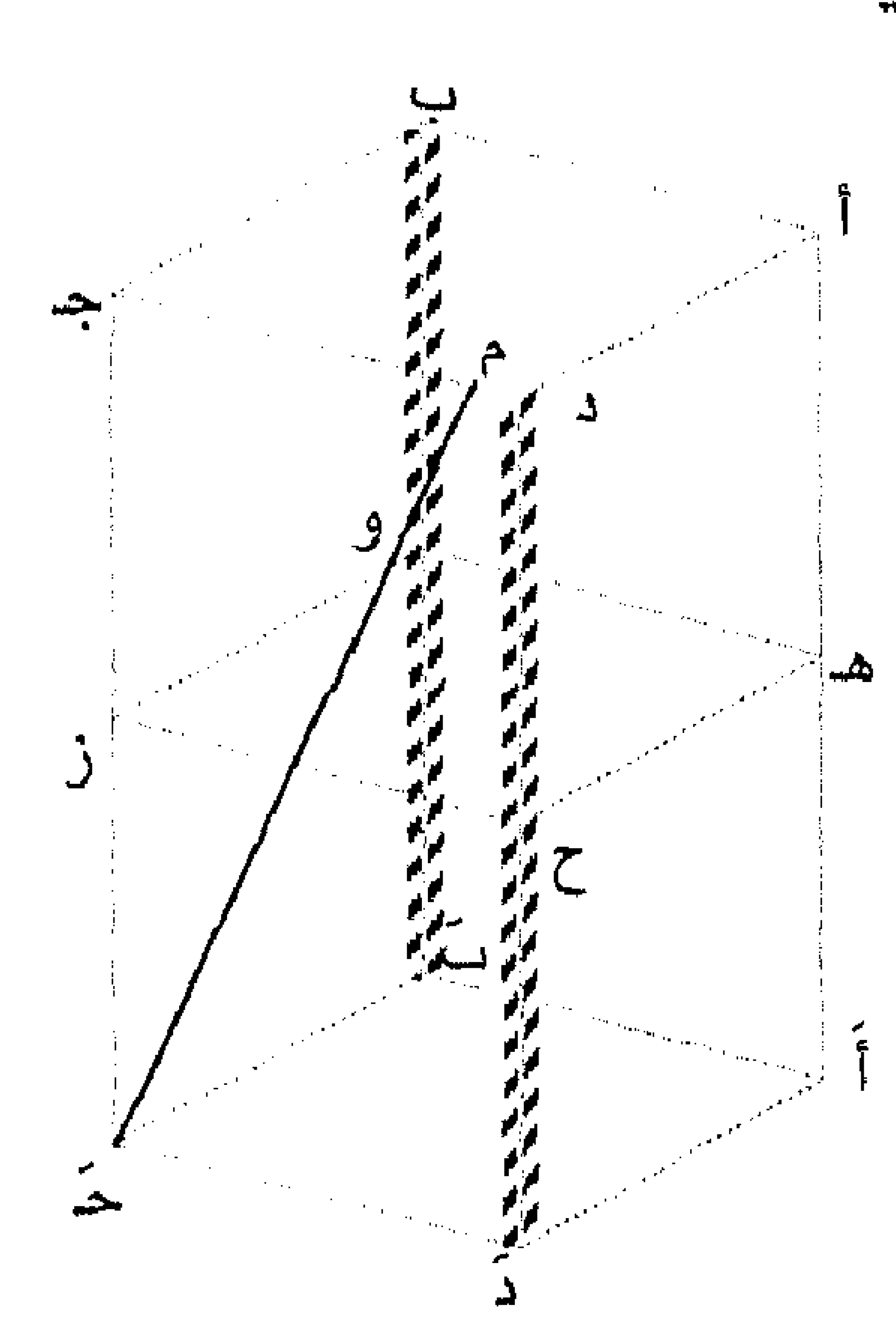


فالمستقيم أ ب هو مستقيم مشترك بين المستويين س، ص كونه خط تقاطع المستويين.

وبشكل عام إذا تقاطعت عدة مستويات مختلفة فإن تقاطعها يمكن أن يكون مستقيم كما في صفحات الكتاب والتي تشترك جميعها في خط واحد كما في الشكل فالمستويات س، ص، ع، ... (صفحات الكتاب فيه) جميعها تشترك بالخط المستقيم أ ب.



⇦ مثال: اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل موشوراً رباعياً:



(١) حدّد تقاطع المستويين أ أَ بَ ب، ب بَ جـَ جـ

الجواب هو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(٢) حدّد مستقيماً يمر بالنقطة د ويوازي $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

الجواب هو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د دَ}}$

(٢) حدّد المستوى الذي يحوي المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ جـَ}}$

الجواب هو المستوى د جـ جـَ وهو نفسه د دَ جـ إذا أردت

(١٤-٤) النظريات Theorems

إنها النظريات التي سنوردها إتماماً لبناء هيكل الهندسة الفضائية، ولكن بدون براهين أو إثباتات إنما توضيحاً بالتعليقات والرسم في معظم الأوقات.

وهذه النظريات شاملة لأوضاع المستقيمات في الفضاء ولنبدأ بتوضيح المفاهيم والمصطلحات أولاً:

حسب التدرج التالي:

سنناقش العلاقة بين المستقيمات في الفضاء

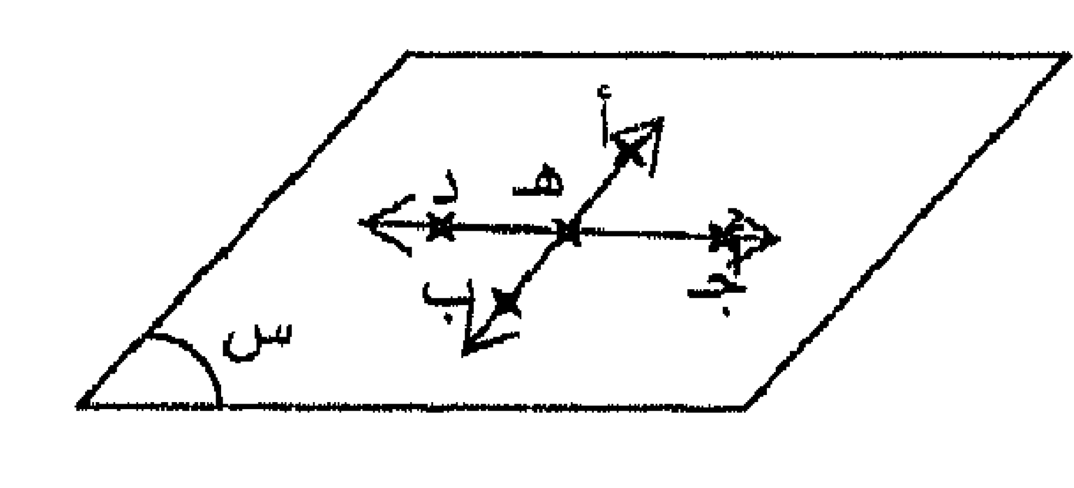
والعلاقة بين المستقيمات والمستويات في الفضاء

ثم العلاقة بين المستويات في الفضاء كما يلي:

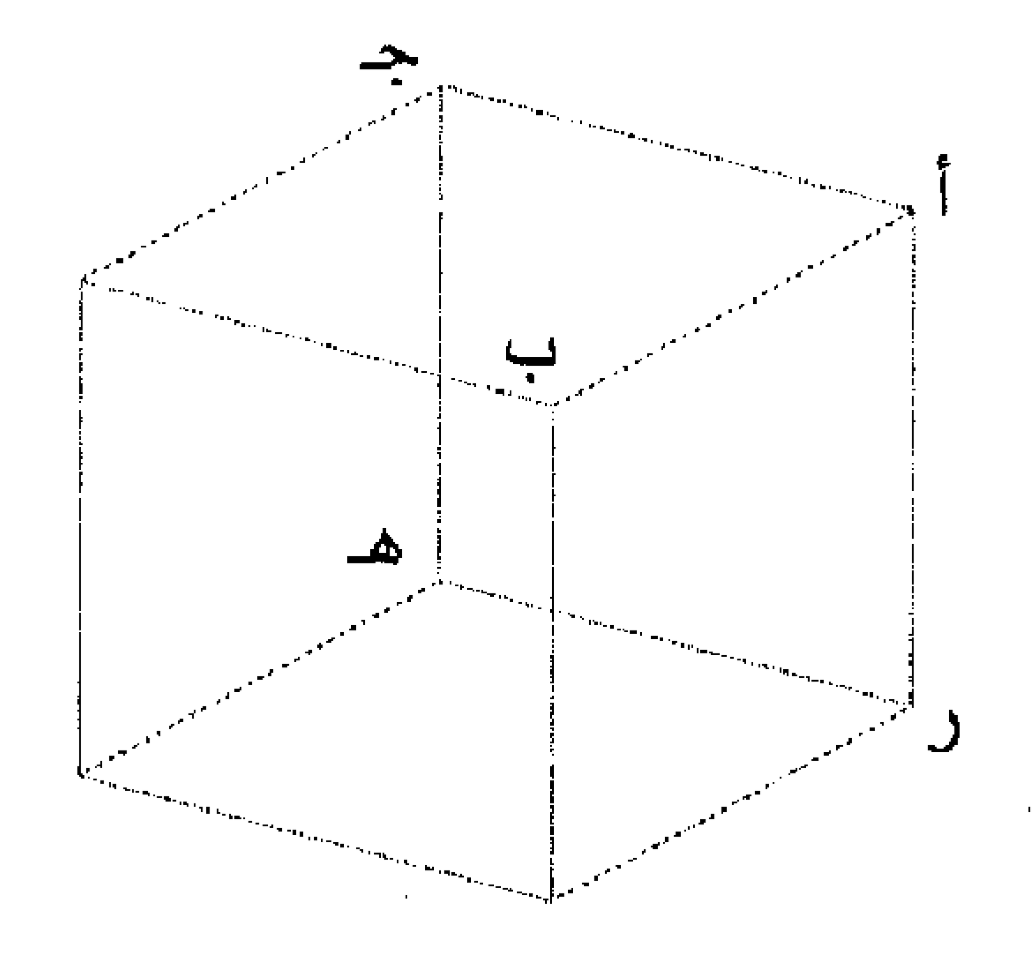
أولاً: العلاقة بين المستقيمات في الفضاء

(١) المستقيمان المتقاطعان:

هما المستقيمان الواقعان في مستوى واحد والمشتركان في نقطة واحدة فقط كما في الشكل.



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يتقاطعان بالنقطة هـ

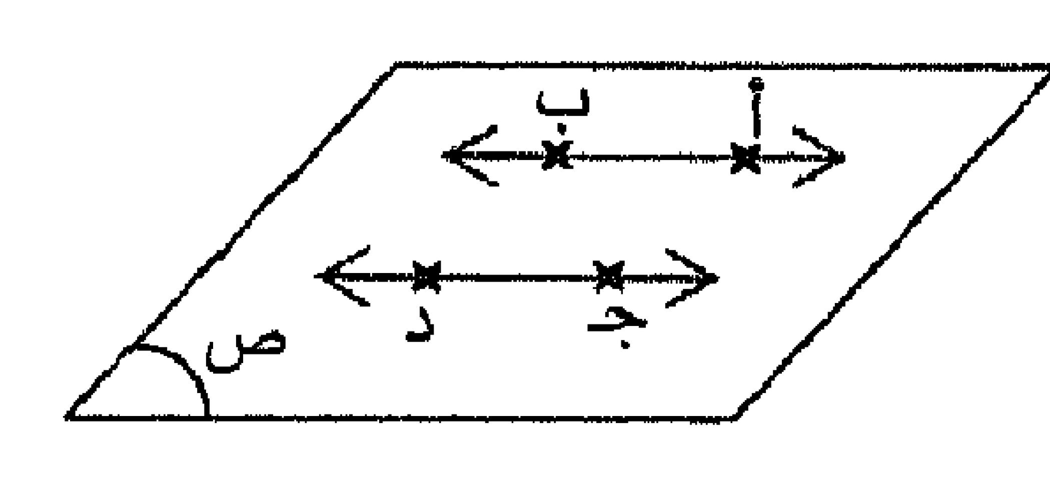


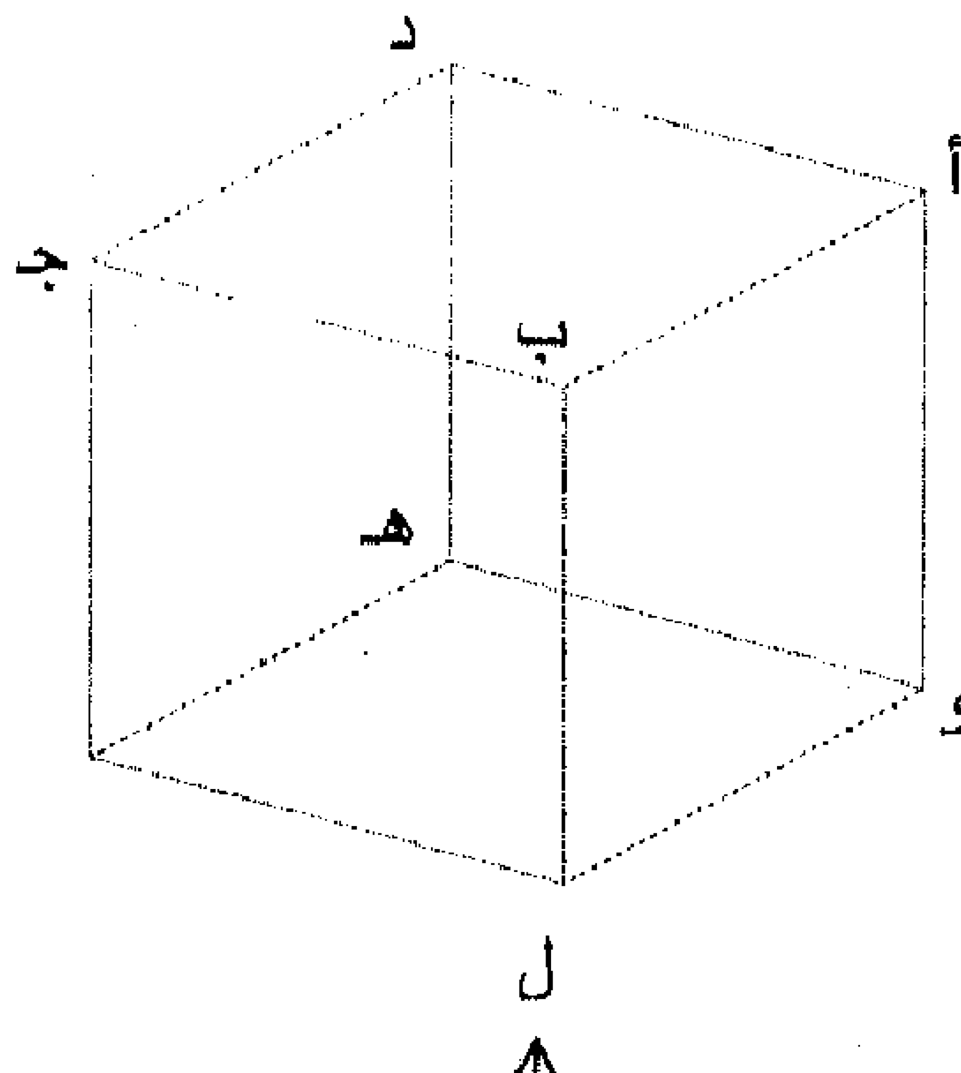
والشكل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

وكذلك $\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ر}}$

(٢) المستقيمان المتوازيان

هما المستقيمان الواقعان في مستوى واحد وغير متقاطعين كما في الشكل



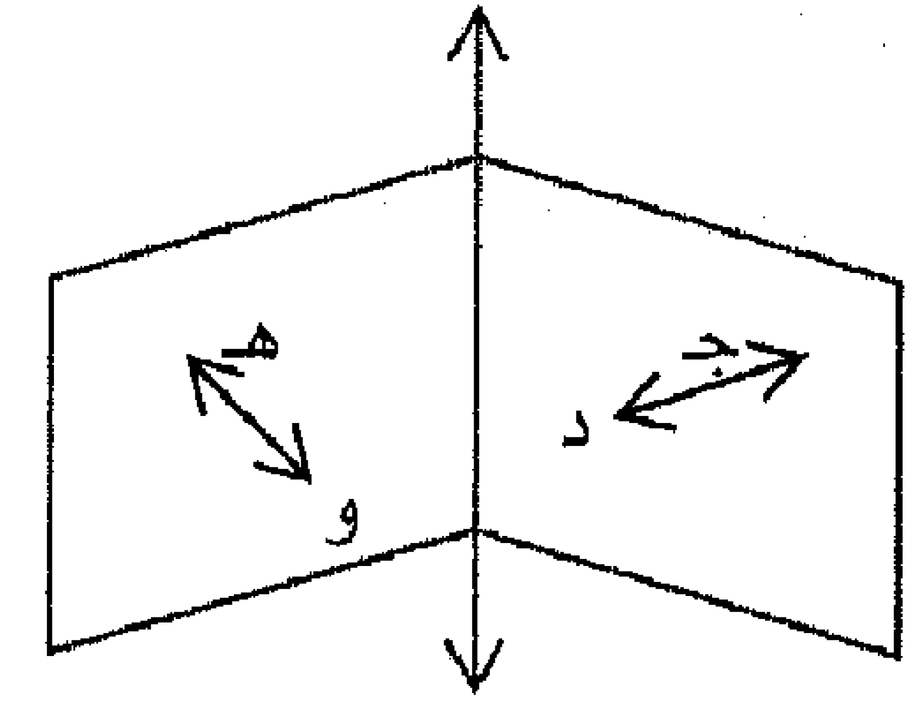


والشكل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

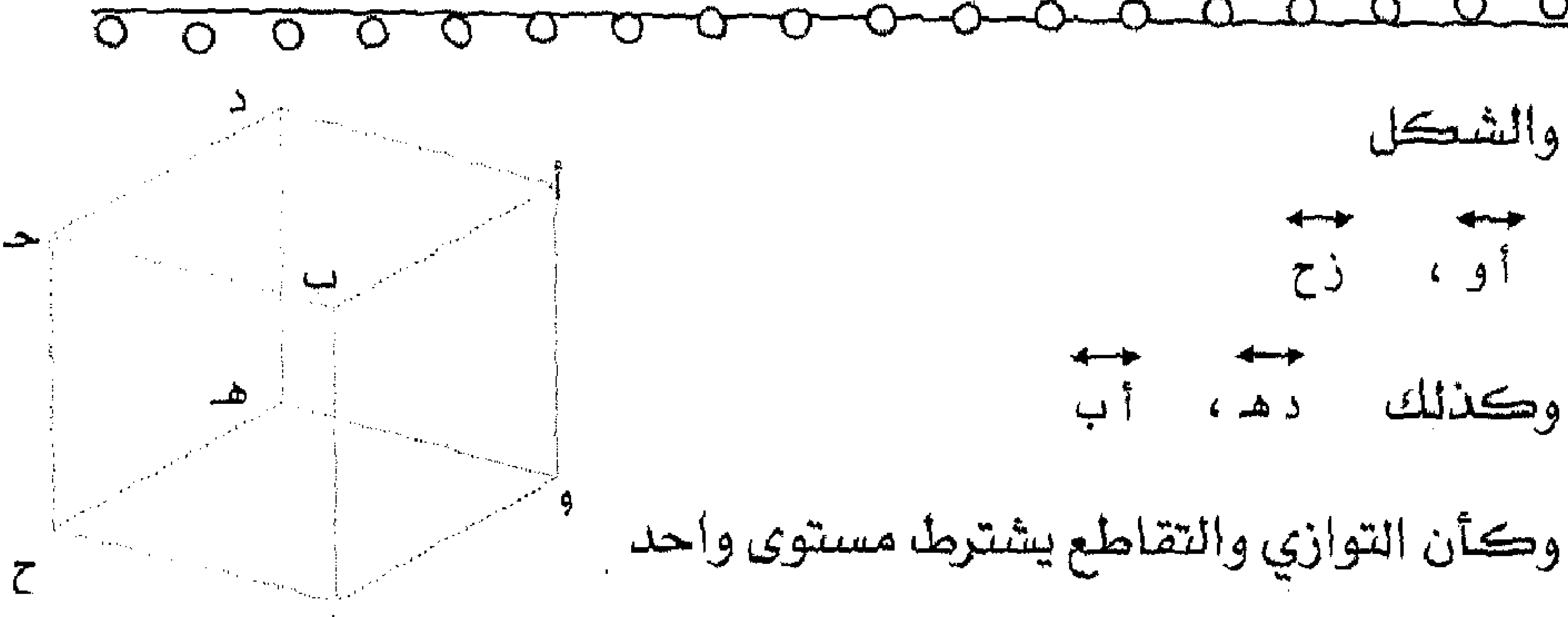
وكذلك $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

(٣) المستقيمان المتخالفان

هما المستقيمان غير المتوازيين وغير المتقاطعين ولا يحويهما مستوى واحد كما في الشكل



$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$



والشكل

$\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ز ح}}$

وكذلك $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

وكأن التوازي والتقاطع يشترط مستوى واحد

وأما التخالف فيشترط مستويين مختلفين.

فالمستقيمان المتخالفان لا يمكن أن يحويهما مستوى واحد على الإطلاق.

مع ملاحظة أن القطعتين المستقيمتين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ تتبعان المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ حيث $\overline{\text{أ ب}}$ ∋ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(كون $\overline{\text{أ ب}}$ جزء من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$)

وكذلك $\overline{\text{جـ د}}$ ∋ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (كون $\overline{\text{جـ د}}$ جزء من $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$)

فإذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متوازيين

فالقطعتين المستقيمتين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيين أيضاً

وإذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متقاطعين

فالقطعتين المستقيمتين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متقاطعتين أيضاً

ثم إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متخالفين

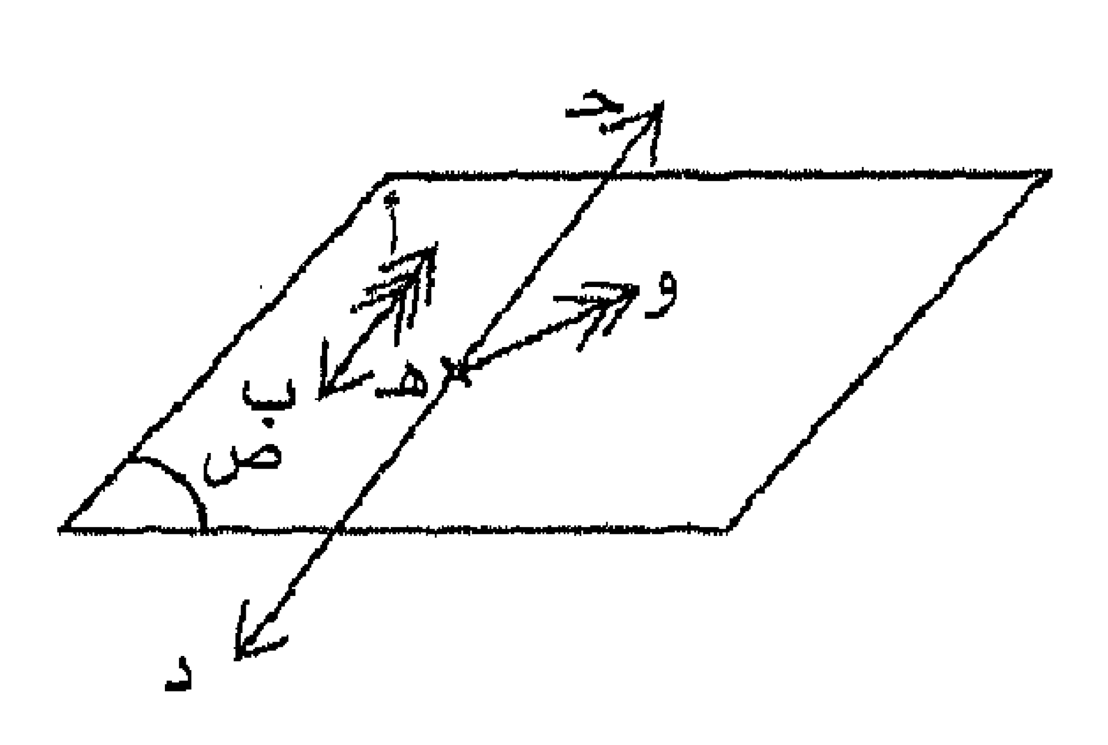
فالقطعتين المستقيمتين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متخالفتين أيضاً

(٤) الزاوية بين المستقيمين المتخالفين

بما أن الزاوية شعاعان ينطلقان من نقطة واحدة هي الرأس في المستوى الواحد كما في الشكل ∡ أ و ب

وهذه الزاوية ترتبط بالمستقيمين المتقاطعين.

وأما الزاوية بين مستقيمين متخالفين فتتحدد كما في الشكل



$\overleftrightarrow{جـ د}$ يقطع المستوى ص بالنقطة هـ

(وهو في مستوى آخر غير ص)

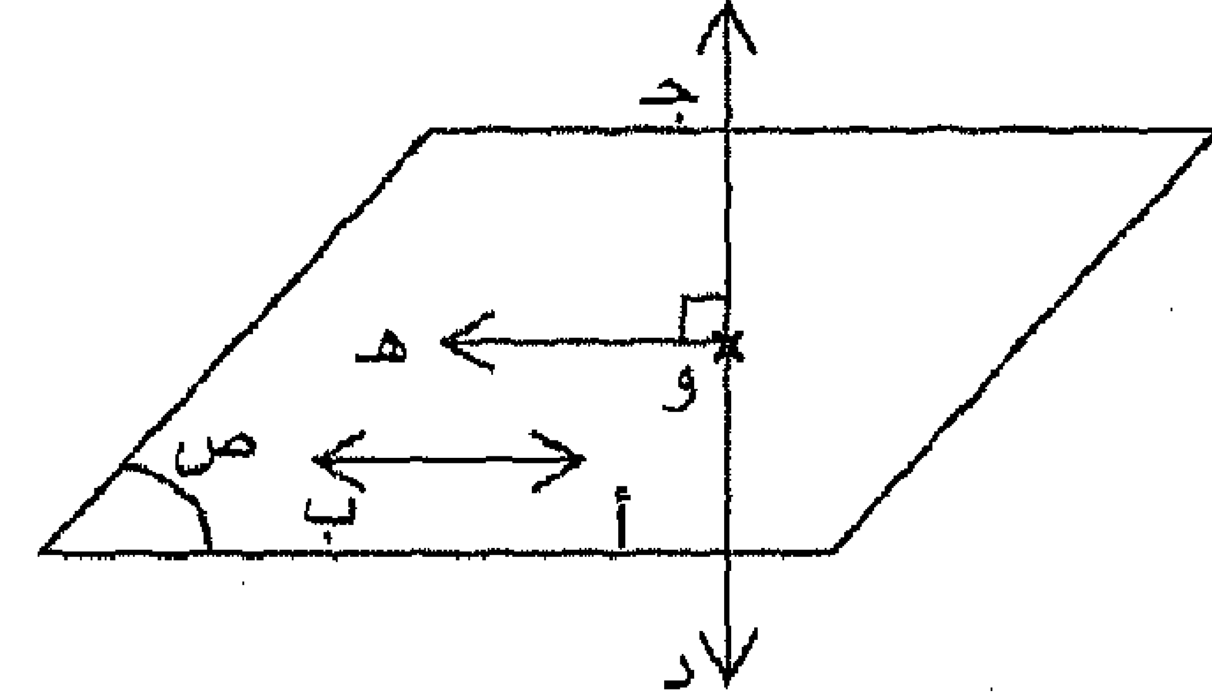
$\overleftrightarrow{أ ب}$ يقطع المستوى ص بالنقطة هـ

(وهو في مستوى آخر غير ص)

المستقيم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{ب أ}$ وفي المستوى ص نفسه فتكون الزاوية الحادة ∢ جـ هـ و الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ هي الزاوية بين المستقيمين المتخالفين $\overleftrightarrow{ب أ}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$

(٥) المستقيمان المتخالفان المتعامدان:

يقال المستقيمين متخالفين إنهما متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما قائمة كما في الشكل.



المستقيم جـ د يقطع المستوى ص في النقطة هـ (وهو في مستوى آخر غيرها)

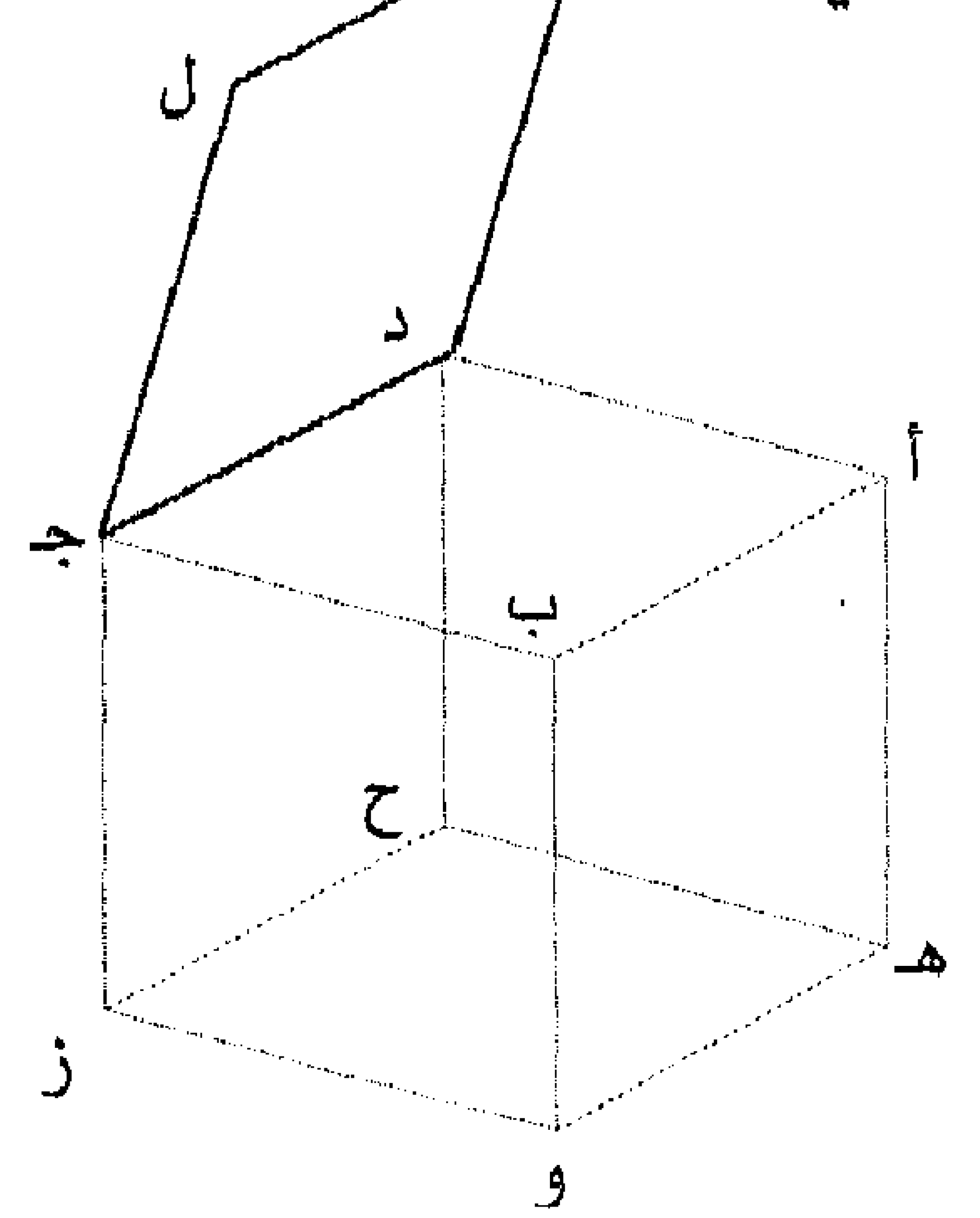
والمستقيم أ د يقع على المستوى ص

فالمستقيمان $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ متخالفان كون أحدهما $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقع في المستوى ص والآخر لا.

نرسم من ومستقيماً يوازي $\overleftrightarrow{أ ب}$ $\overleftrightarrow{هو هـ}$

فتكون الزاوية ∢ أ و هـ بين المستقيمين، وكونها قائمة فالمستقيمان $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ متعامدان.

⇦ مثال: الشكل المجاور يمثل صندوقاً (متوازي مستطيلات) مرفوع الغطاء، أعطِ مثالاً واحداً على كل حالة من الحالات التالية.



(١) ثلاثة أزواج من ال مستقيمات المتوازية

المستقيم أد // بجـ، هـو// حز

دح // جـز

(٢) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة

(أب ، بجـ)، (بجـ ، جـد)،

(دح ، دأ)

(٣) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة

(بجـ ، دح)، (دك ، وز)، (أب ، حز)

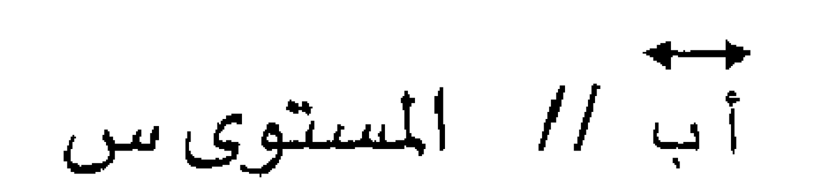
(٤) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتعامدة

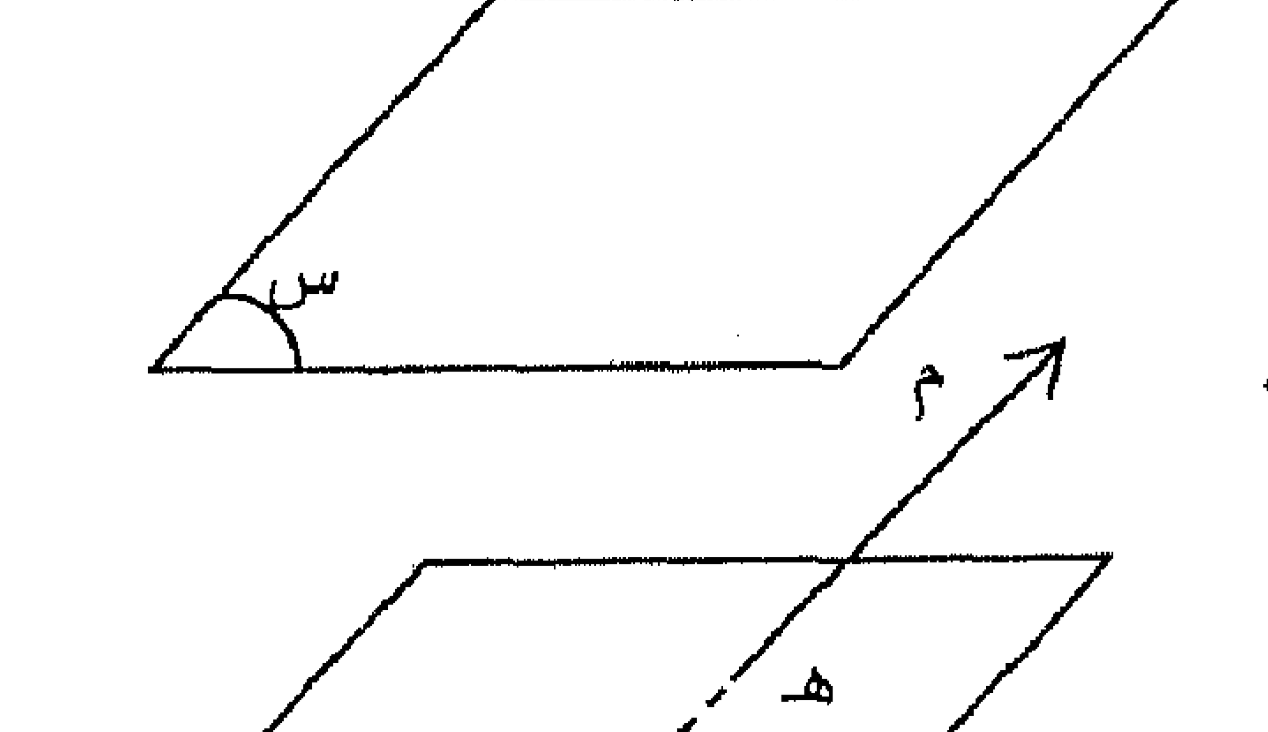
(أب ، أهـ)، (هـو، دح)، (دح ، بو)

ثانياً العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء

تنحصر هذه العلاقة في وضع من الأوضاع الثلاثة الآتية:

(١) مستقيم يوازي المستوى: حيث المستقيم لا يشترك مع المستوى في أية نقطة كما في الشكل:

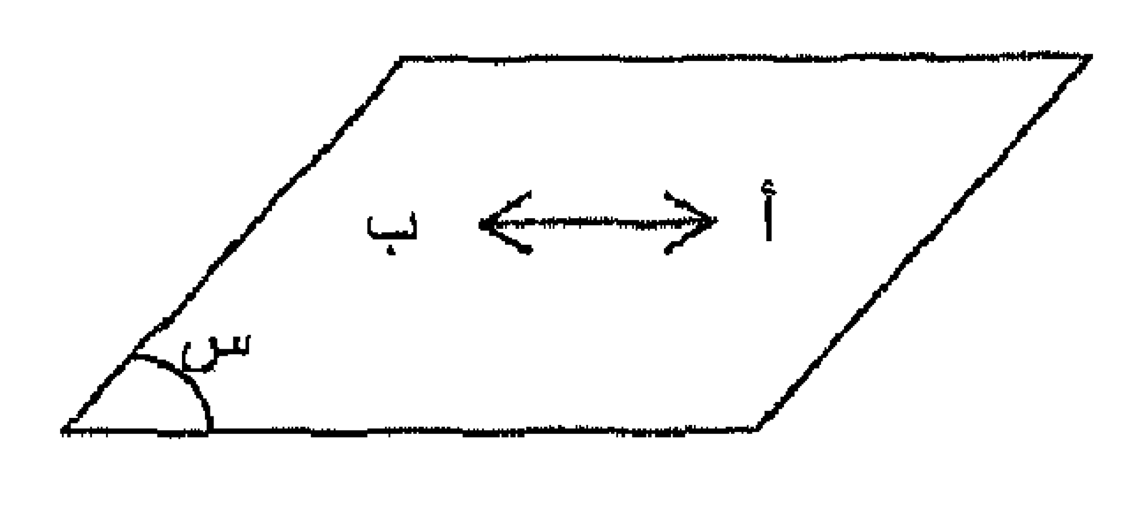




(٢) مستقيم يقطع المستوى في نقطة واحدة كما في الشكل:

مهـ يقطع المستوى في نقطة هـ

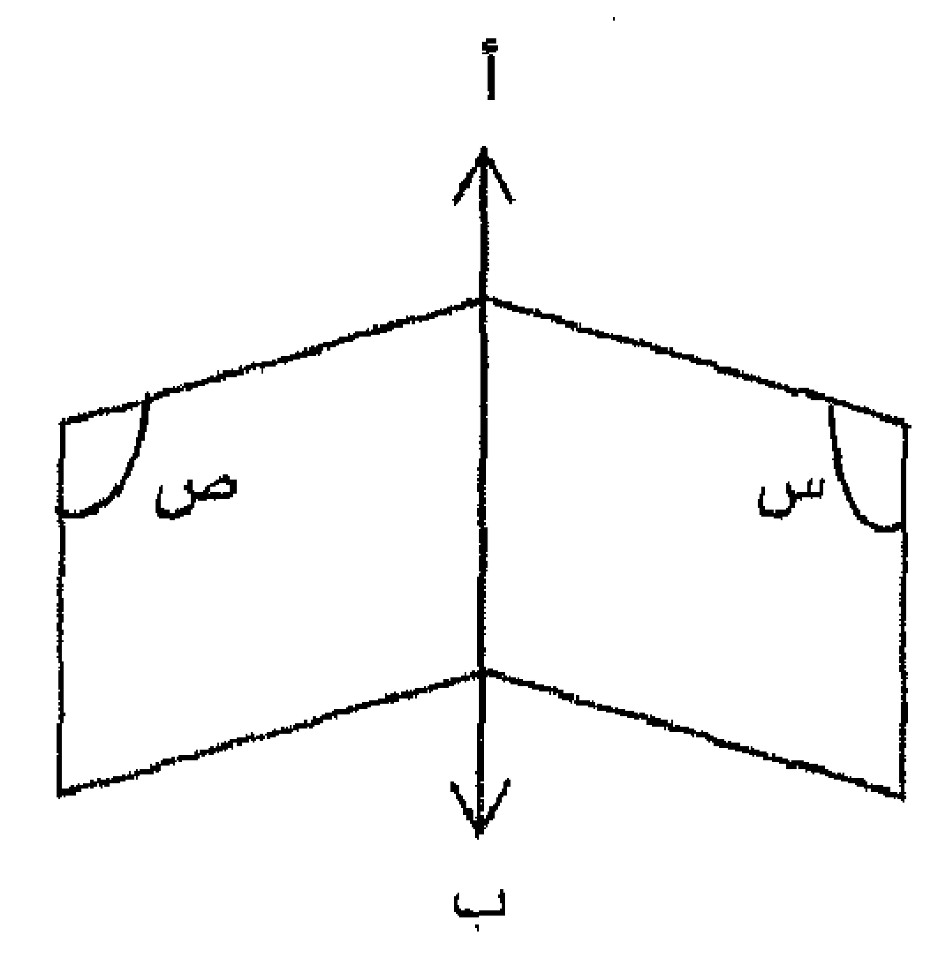
(٣) مستقيم يقع بكامله في المستوى كما في الشكل



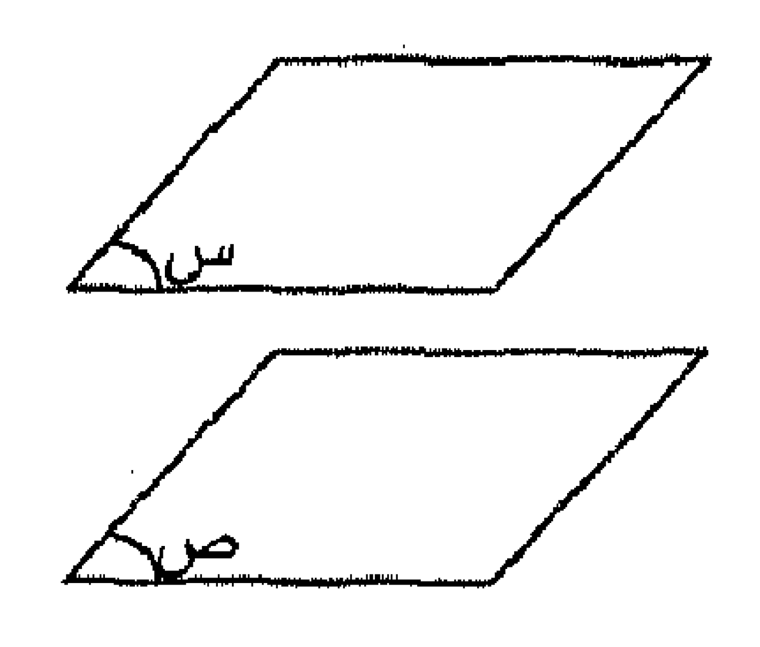
ثالثاً: العلاقة بين مستويين في الفضاء

تنحصر هذه العلاقة في حالتين:

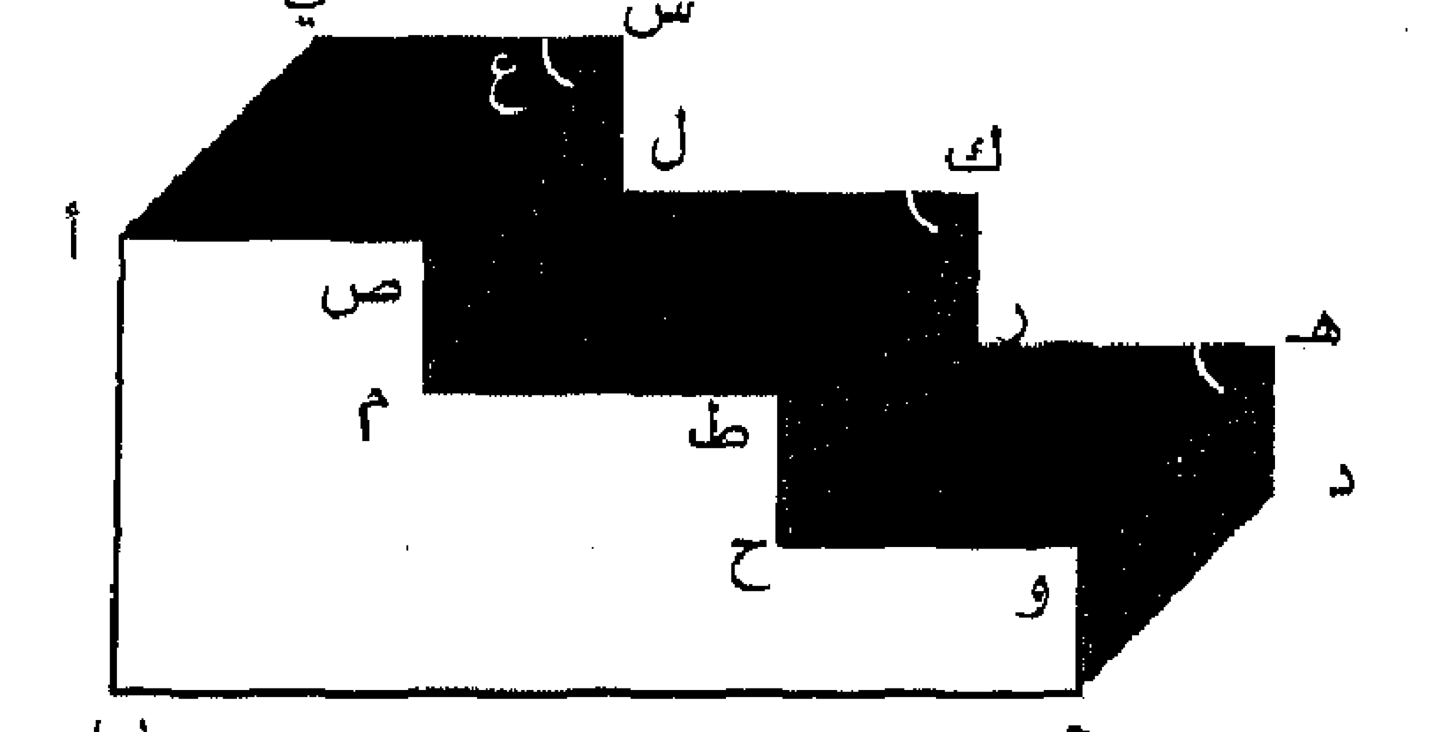
(١) يتقاطع المستويان في مستقيم



(٢) يتوازى المستويان حيث أنها لا يتقاطعان



⇦ مثال: من الشكل المجاور الذي يمثل درجاً لأحد المنازل أعط مثالاً على:



(١) مستويان متوازيان

المستوى و هـ ر والمستوى ل ط م متوازيان.

(٢) مستوى يوازي المستوى س ل م

المستوى ك ر ح

(٣) مستقيم يقطع المستوى أ ب جـ

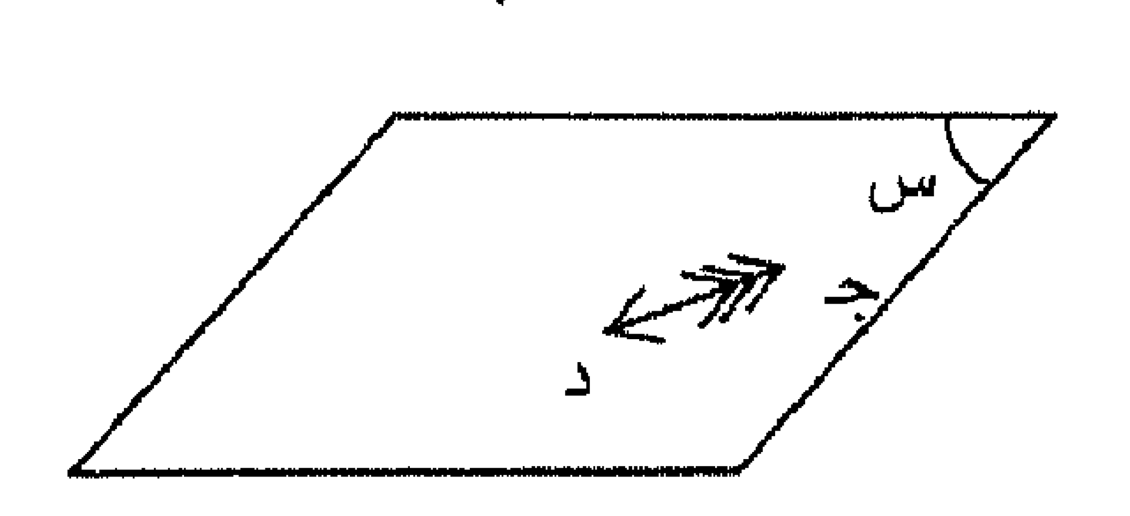
المستقيم ل م وغيره الكثير.

وأما النظريات فسنوردها كما هو آت:

(١) نظريات التوازي Paralleism Theorems

نظرية «١»

«إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى».



والتوضيح:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س،

والمعى أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

عندها ينتج أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س

نظرية «٢»

«إذا وازى مستقيم مستوى فإن كل مستوى مار بالمستقيم وقاطع المستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم».

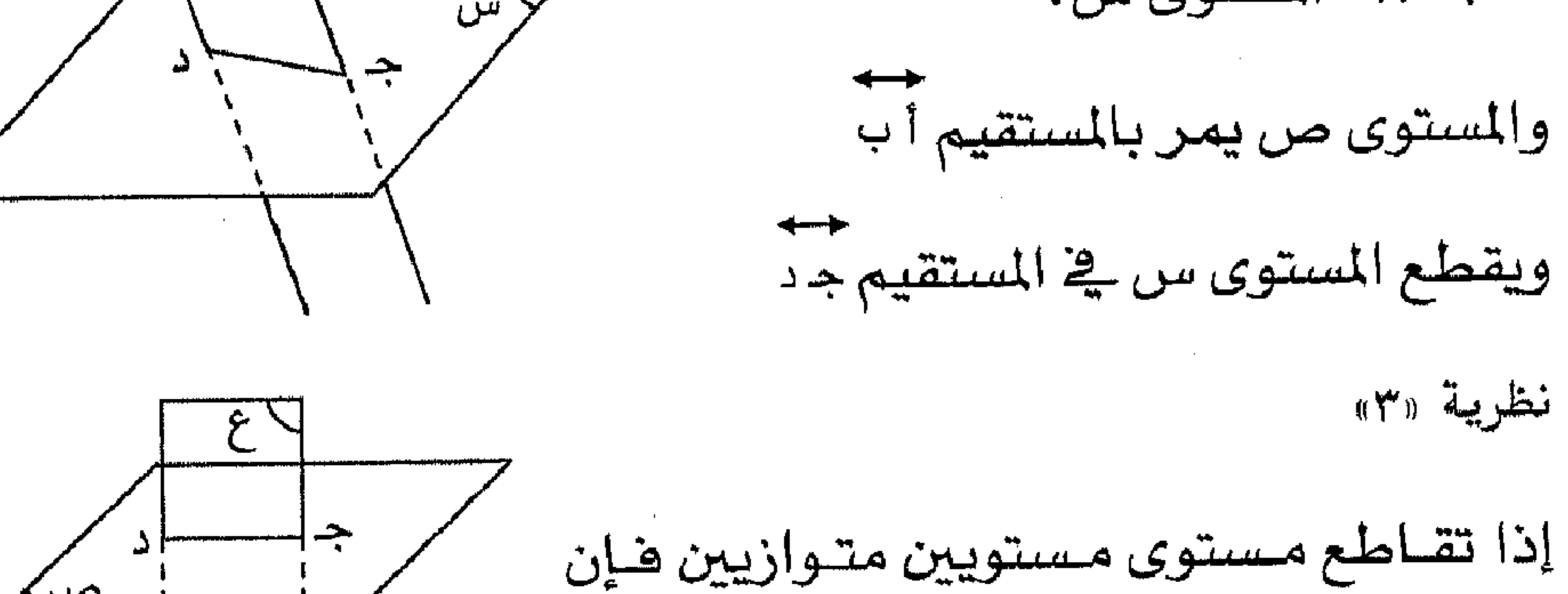


والتوضيح:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س،

والمستوى ص يمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

ويقطع المستوى س في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$



نظرية «٣»

إذا تقاطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه مع المستويين متوازيان.

والتوضيح:

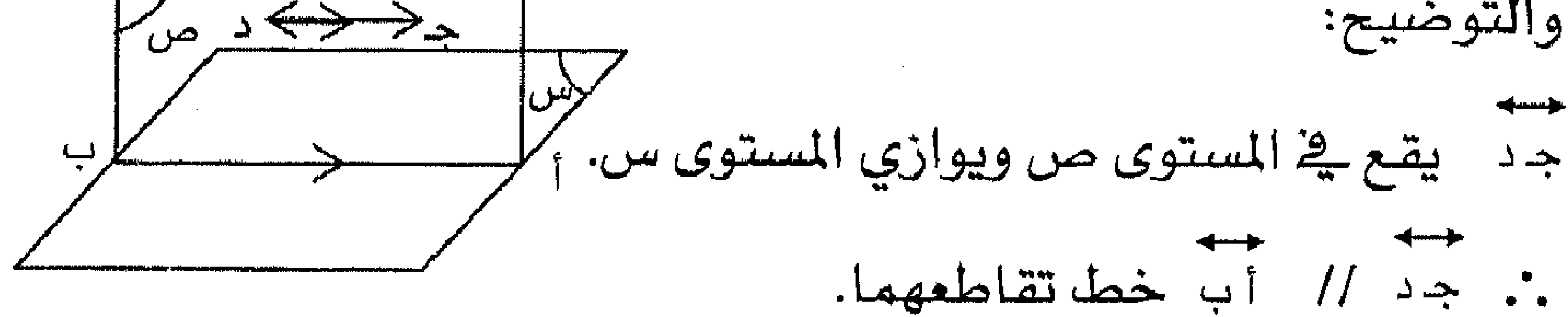
والمستوى يوازي المستوى ص والمستوى ع قاطع الباقي المستقيم

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$

أي أن $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ كونهما واقعتين في مستويين متوازيين فهما لا يلتقيان ولا يتقاطعان أي أنهما متوازيان.

نظرية «٤»

إذا تقاطع مستويان ورسم في أحدهما مستقيم يوازي المستوى الآخر فإن هذا المستقيم يوازي خط تقاطع المستويين.

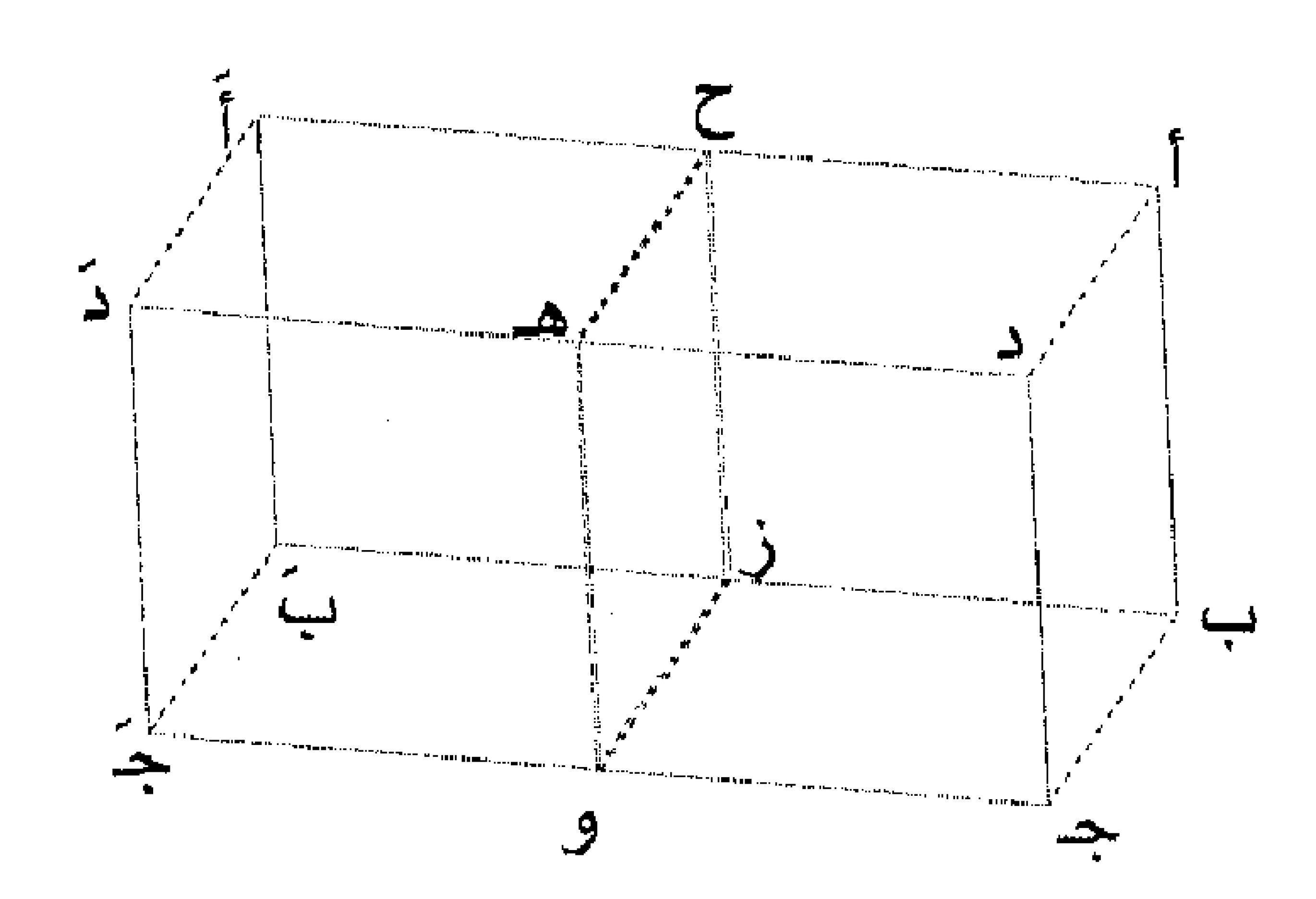


والتوضيح:

$\overleftrightarrow{جـد}$ يقع في المستوى ص ويوازي المستوى س.

∴ $\overleftrightarrow{جـد}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ خط تقاطعهما.

⇦ مثال: يمثل الشكل متوازي مستطيلات أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ



قطع المستوى س أحرفه في و، ز، ح، هـ كما هو واضح في الشكل

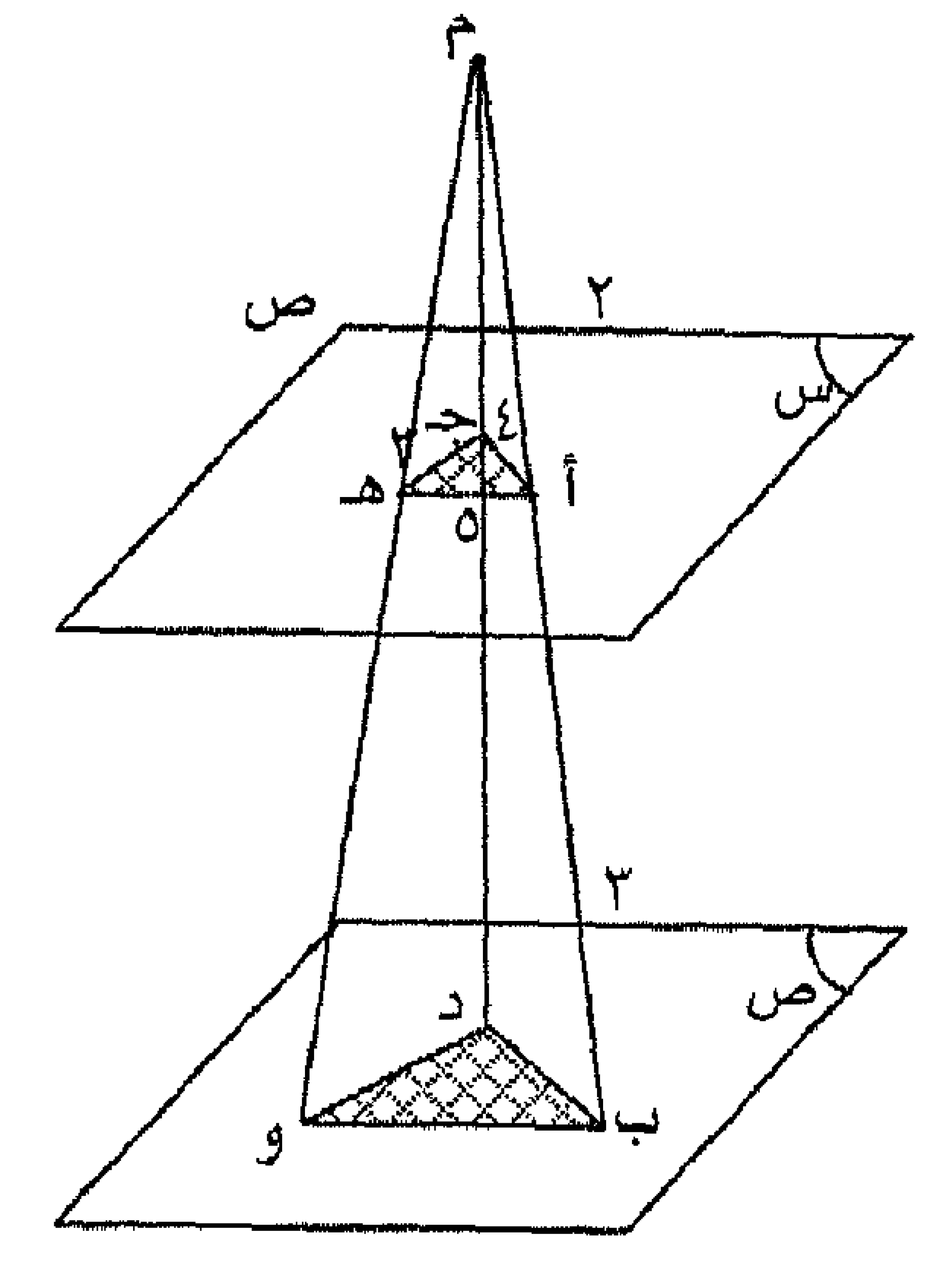
فالشكل و ز ح هـ متوازي أضلاع كون $\overleftrightarrow{حهـ}$ واقع في المستوى أ د دَ أَ والذي يوازي المستوى ب جـ جـَ بَ

∴ $\overleftrightarrow{حهـ}$ // $\overleftrightarrow{وز}$ خط التقاطع

وكذلك $\overleftrightarrow{حز}$ // $\overleftrightarrow{هـو}$ خط التقاطع

فالشكل هـ و ز ح شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين فهو متوازي أضلاع.

⇦ مثال: المستويان س، ص متوازيان، والنقطة م خارجها والمستقيمان م أ ب



، م جـ د، م هـ و قطعت المستويين كما في الشكل

وكان $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، أ جـ = ٤ سم،

جـ هـ = ٣ سم، أ هـ = ٥ سم

أوجد أطوال أضلاع المثلث ب د و ثم مساحته.

$$\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$$

(كون $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ خطي تقاطع المستوى م ب د مع المستويين س، ص)

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{\text{ب د}} \longrightarrow \text{ب د} = \frac{٣ \times ٤}{٢} = ٦ \text{ سم.}$$

$\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}}$ (كون $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ لنفس السبب السابق)

$$\therefore \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{\text{ب و}} = \frac{٣ \times ٥}{٢} = ٧,٥ \text{ سم.}$$

$\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}}$ (كون $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$)

وكذلك $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د و}}$ (كون $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{د و}}$)

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٣}{\text{د و}} \longrightarrow \text{د و} = \frac{٣ \times ٣}{٢} = ٤,٥ \text{ سم.}$$

فأضلاع المثلث

د، ب، و

وَ = ٦سم

بَ = ٤,٥ سم

دَ = ٧,٥ سم

$$\text{مساحة المثلث د ب و} = \sqrt{\text{ح (م} - \text{دَ) (م} - \text{وَ) (م} - \text{بَ)}}$$

حيث $\text{ح} = \frac{\text{أَ} + \text{بَ} + \text{جَ}}{٢}$ (نصف المحيط)

$$= \frac{٦ + ٤,٥ + ٧,٥}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩ \text{ سم}$$

مساحة المثلث د ب و = $\sqrt{٩\,(٩ - ٧,٥)\,(٩ - ٦)\,(٩ - ٤,٥)}$

$$= \sqrt{(٩)\,(١,٥)\,(٣)\,(٤,٥)}$$

$$= \sqrt{(٩)\,\left(\frac{١٥}{١٠}\right)(٣)\left(\frac{٤٥}{١٠}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٣ \times ٣ \times ٥ \times ٣ \times ٣ \times ٥ \times ٣ \times ٣}{١٠٠}}$$

$$= \frac{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٥}{١٠} = \frac{٢٧}{٢} = ١٣,٥ \text{ سم}^{٢}$$

(٢) نظريات التعامد Perpendicularity Theorems

نظرية (١)

يكون المستقيم عمودياً على مستوى إذا كان عمودياً على المستقيمات جميعها الواقعة في المستوى والمارة بنقطة تقاطع المستقيم مع المستوى.

والتوضيح:

المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ عمودياً على المستوى س لأنه عمودياً على $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ المتقاطعان في النقطة هـ ويبعد عن ذلك $\overleftrightarrow{ل} \perp$ س

ويقرأ المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على المستوى س.

ويمكن أن يُصاغ منطوق النظرية للتسهيل كما يلي:

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين في مستوى واحد يكون عمودياً على مستويهما.

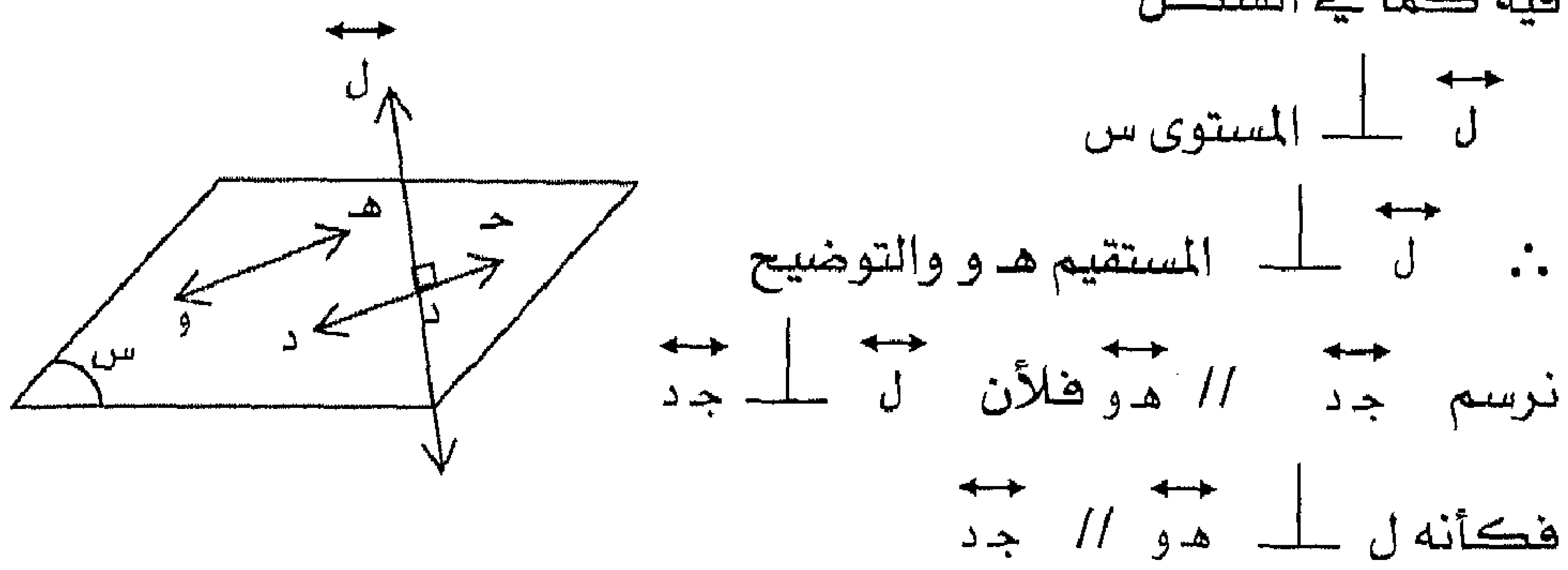
وبشكل عام: المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على كل مستقيم فيه كما في الشكل

$\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ المستوى س

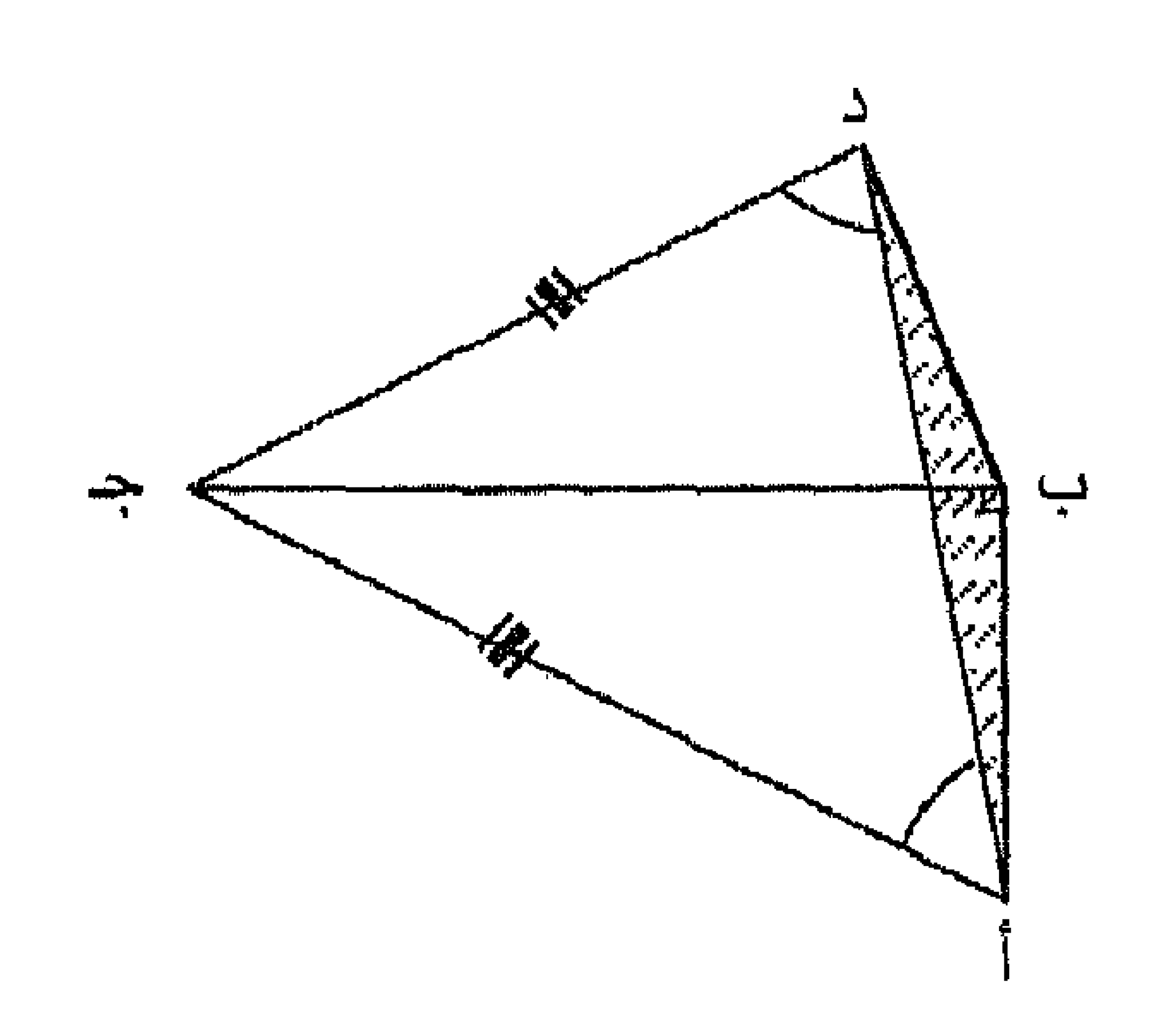
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ المستقيم هـ و والتوضيح

نرسم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ فلأن $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

فكأنه ل $\perp \overleftrightarrow{\text{هـ و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$



⇦ مثال: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب «كما في الشكل» د نقطة ليست في مستوى المثلث.



بحيث أن ب د = ب أ ، د جـ = جـ أ

بين أن: $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى أ ب د

البيان:

بما أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بالفرض (١)

ومن انطباق المثلثين أ ب جـ ، د ب جـ

بثلاثة أضلاع

أ ب = ب د معطيات

أ جـ = جـ د معطيات

ب جـ مشترك

ينتج أن ∢ ١ = ∢ ٢ = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$ (٢)

أي أن $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ ($\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ عند نقطة التقاطع د)

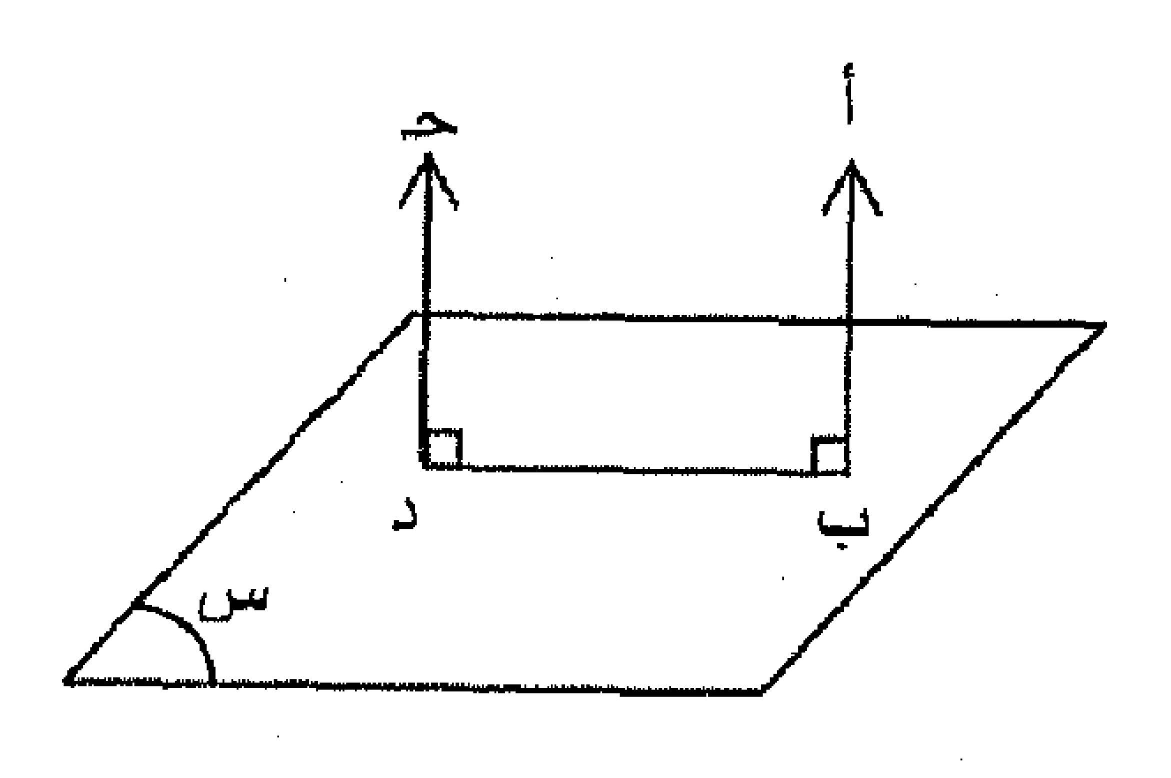
∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوى الذي يضم $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ وهو المستوى أ ب د

وهو المطلوب بيانه.

نظرية (٢)

المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان.

والتوضيح:



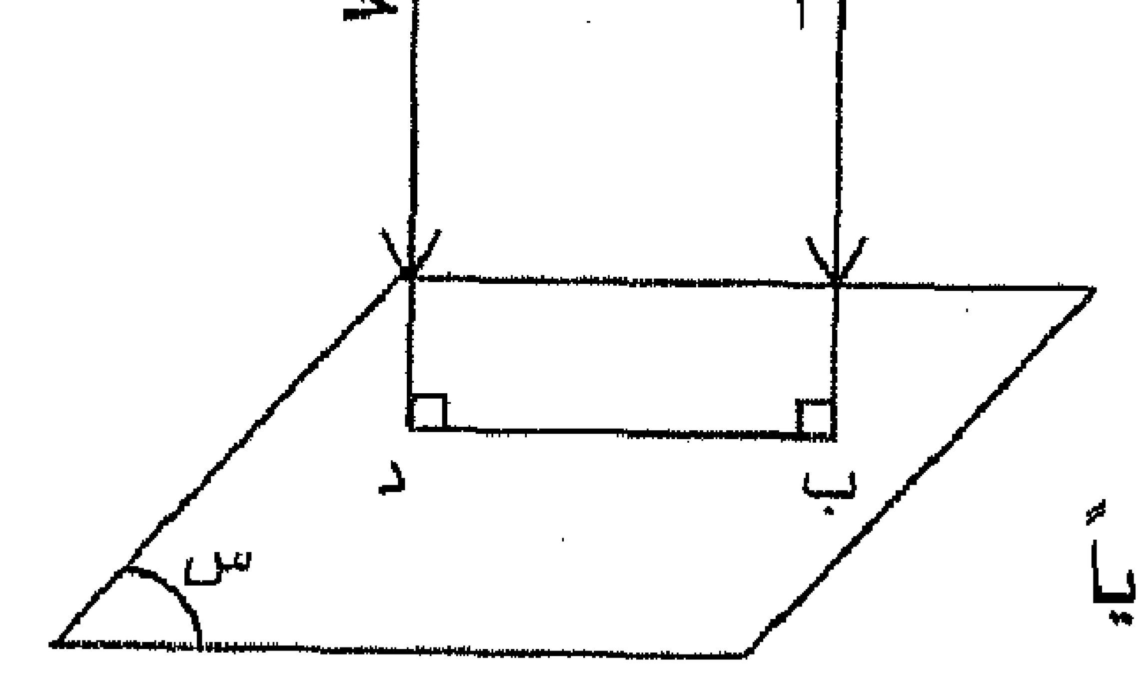
بما أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى س

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

نظرية (٣)

إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عمودياً على مستوى فإن المستقيم الآخر يكون عمودياً على المستوى نفسه.



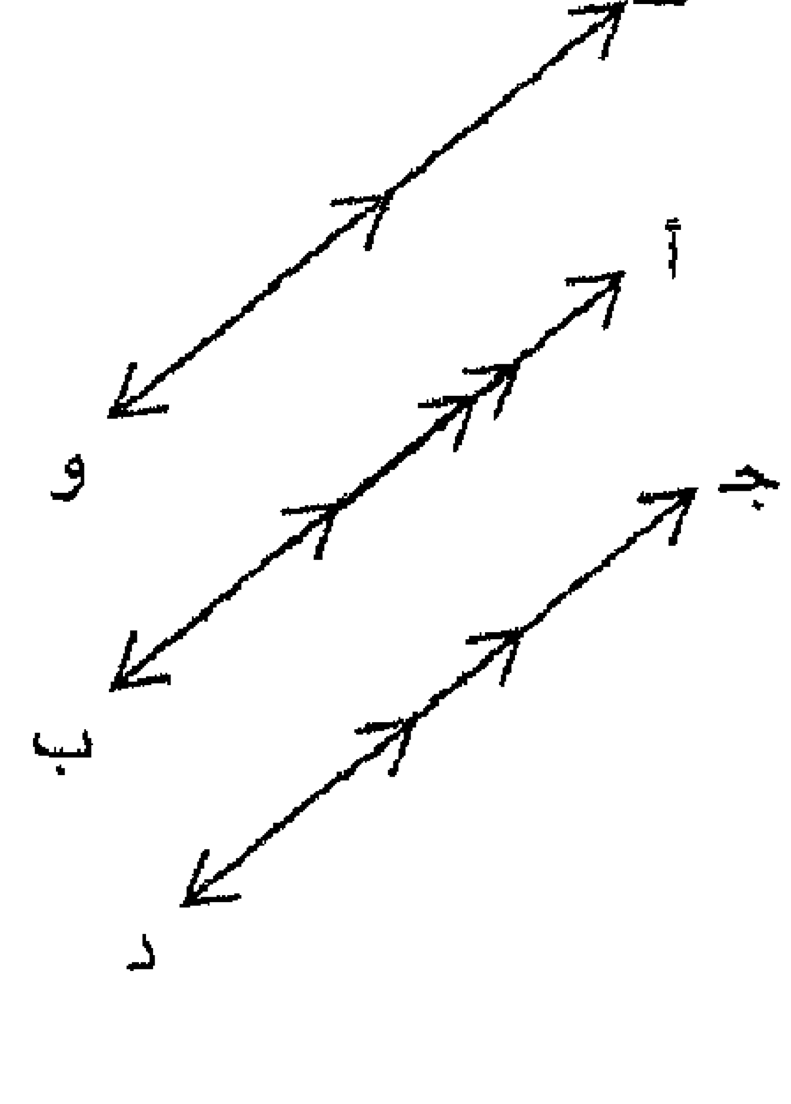
والتوضيح:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى س

وبشكل عام المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان



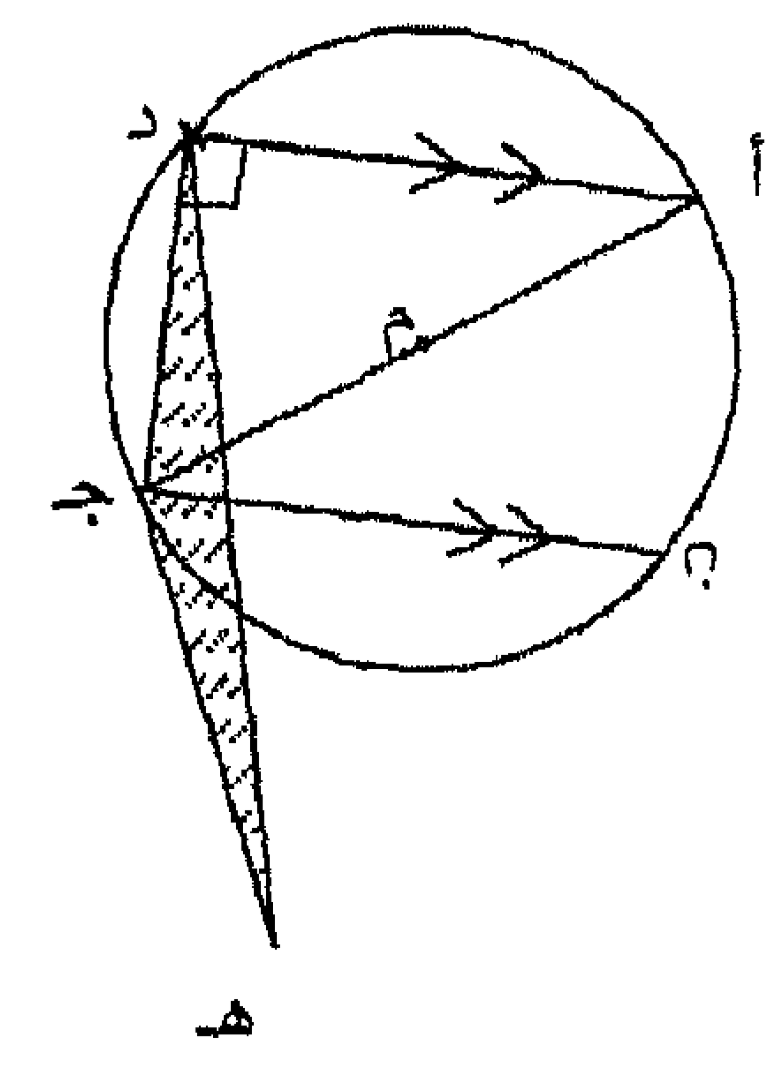
والتوضيح:

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

و $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

أي أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$



⇦ مثال: $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في دائرة ،

د نقطة على الدائرة، رسم $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$

موازياً للمستقيم د أ.

بين أن $\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$ ⊥ المستوى هـ د جـ

بما أن $\overline{\text{ن جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

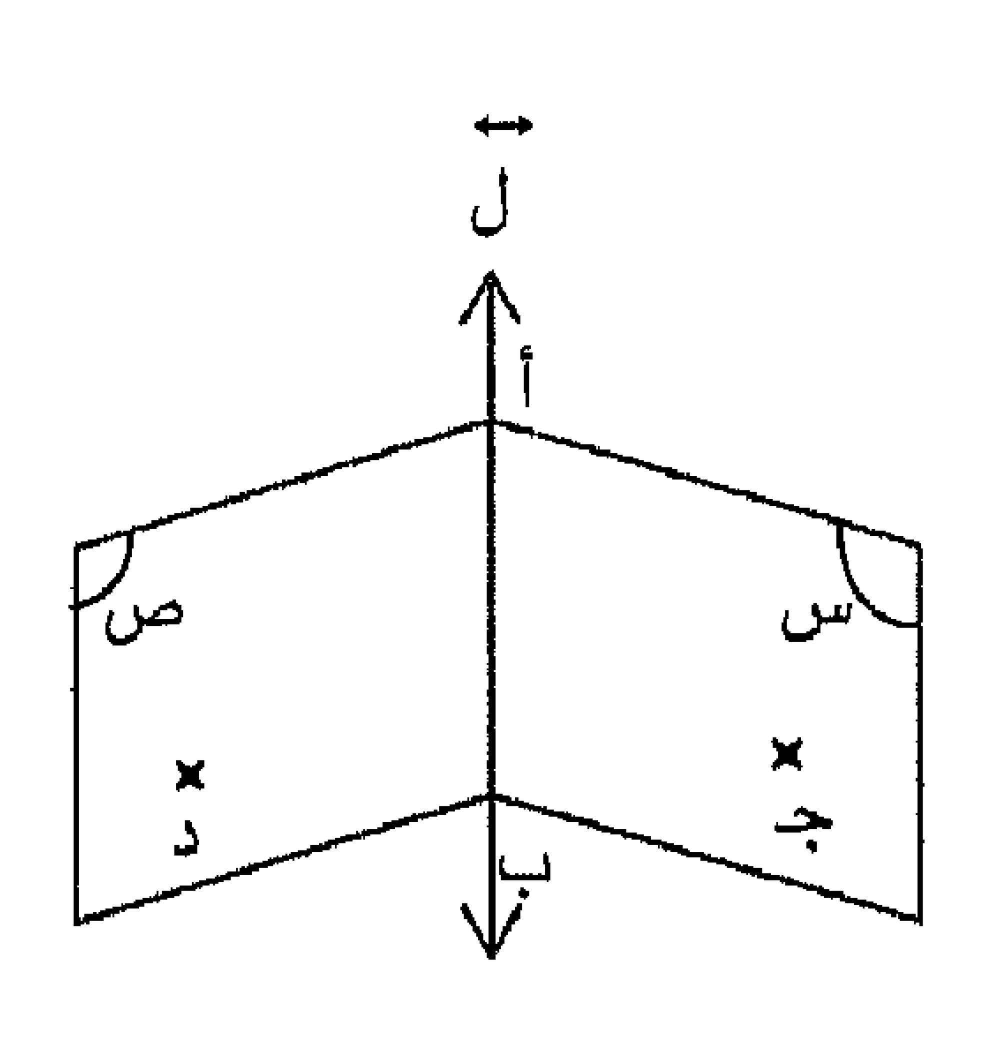
لكن $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى د جـ هـ

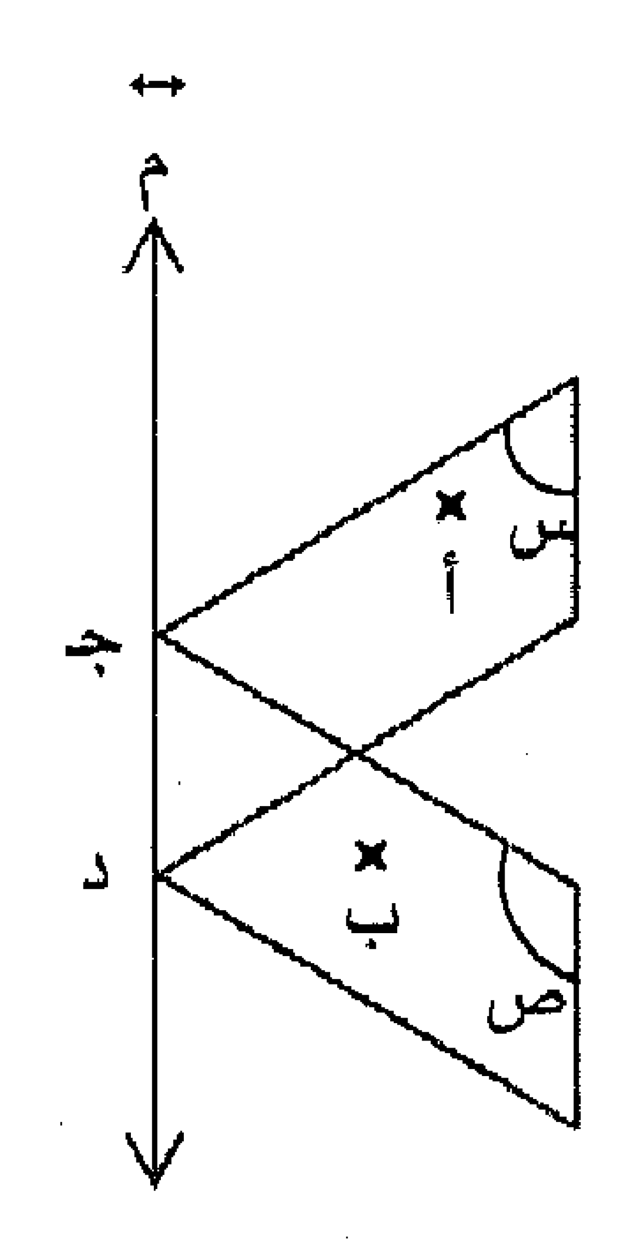
كون ∢ أ د جـ = ٩٠° لأنها محيطين تقابل خط الدائرة أ جـ

∴ $\overline{\text{ن جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

(٣) الزاوية الزوجية The Even Angle

هي اتحاد نصفي مستويين مثل س، ص متقاطعين في مستقيم مثل $\overleftrightarrow{أب}$ ، ويرمز لها بأربعة أحرف، بحيث يمثل الحرف الأول نقطة في أحد نصفي المستويين والحرف الأخير نقطة في نصف المستوى الآخر، والحرفان الوسطان فيمثلان المستقيم المشترك بينهما كما في الأشكال:





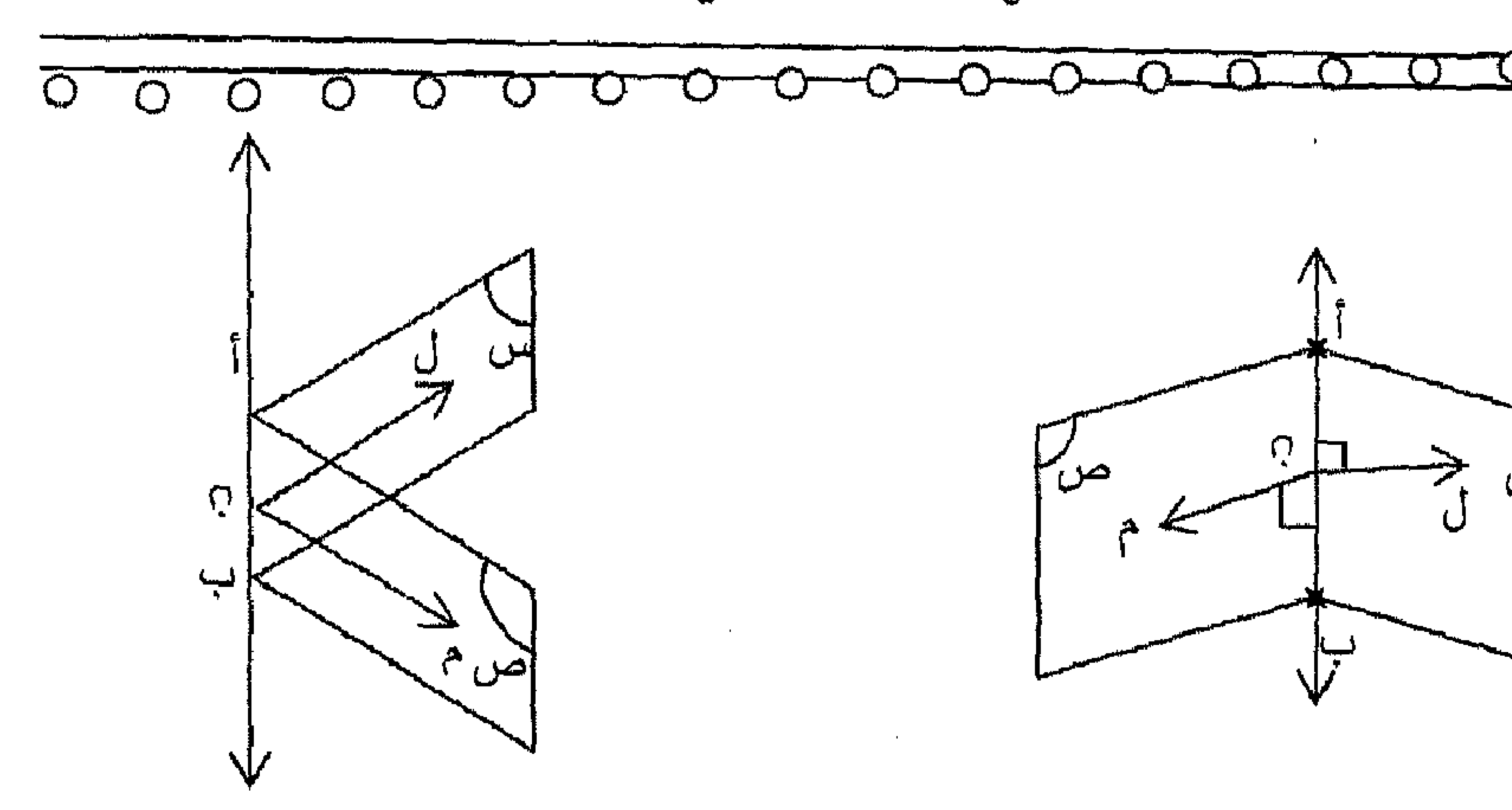
وتقرأ: الزاوية الزوجية (جـ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، د) وكذلك الزاوية الزوجية (أ، $\overleftrightarrow{جـد}$ ، ب)

ويُسمى كل من نصفي المستويين س، ص وجهاً للزاوية الزوجية

ويسمى المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ أو المستقيم $\overleftrightarrow{جـد}$ الناتج عن تقاطع نصفي المستويين حرف الزاوية الزوجية.

وكأن الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين لهما الحرف نفسه.

وأما قياسهما فيتم بأخذ نقطة على حرفها مثل ﻫ وكما في الشكلين التاليين تم رسم $\overleftrightarrow{هـل}$ عموداً على الحرف $\overleftrightarrow{أب}$ في المستوى الأول س و$\overleftrightarrow{هـم}$ وعموداً على الحرف $\overleftrightarrow{أب}$ في المستوى ص كما في الشكلين التاليين:

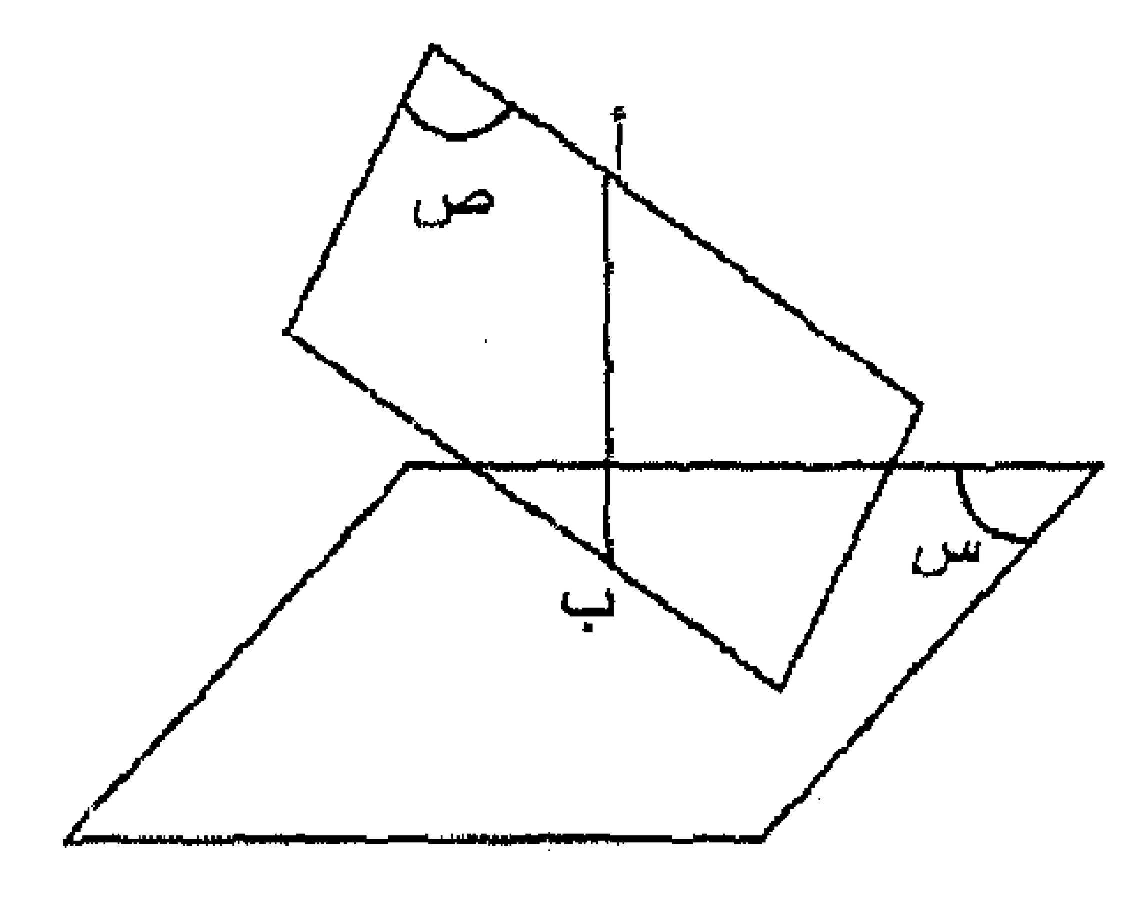


فيصبح قياس الزاوية الزوجية

(ل، $\overleftrightarrow{أب}$ ، م) هو قياس الزاوية المستوية ل ن م وكما في الشكلين أيضاً.

فإذا كان قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90° فإن المستويين متعامدين والعكس صواب إذا كان المستويان متعامدين فإن قياس الزاوية الزوجية بينهما 90°.

نظرية (٤)



إذا كان مستقيم معلوم عمودياً على مستوى معلوم، فكل مستوى يحوي ذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوى المعلوم.

والتوضيح:

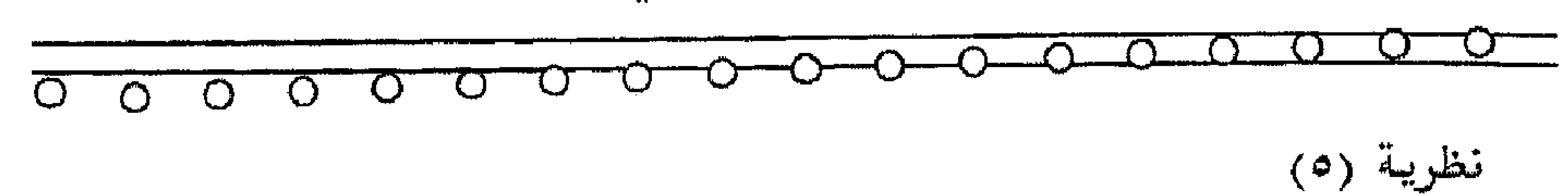
$\overleftrightarrow{أب}$ $\perp$ المستوى س ويلاقيه في نقطة ب والمستوى ص يحوي المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

فإن المستوى ص $\perp$ المستوى س.

⇦ مثال: أ ب جـ د مستوى، $\overleftrightarrow{أو}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ د

بين أن المستوى أ و د $\perp$ أ ب جـ د

البيان: بما أن $\overleftrightarrow{أو}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ د



نظرية (٥)

إذا تعامد مستويان فالمستقيم في أحدهما والعمودي على خط تقاطعهما يكون عمودي على المستوى الآخر كما في الشكل.

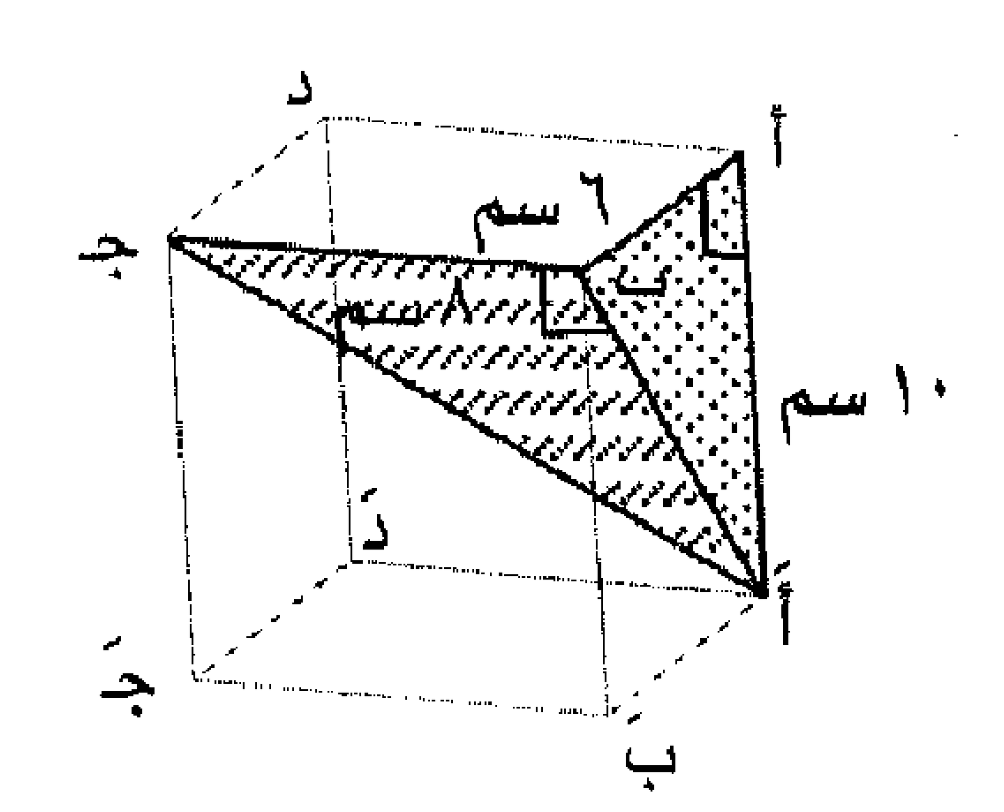
أ ب جـ و هـ د موشور ثلاثي قائم.

قيمة المستوى أ ب جـ ⊥ المستوى أ د هـ ب

والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ في المستوى أ د هـ و وعمودي على خط التقاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ.

⇦ مثال: أ ب جـ د أَ بَ جَـ دَ متوازي مستطيلات كما في الشكل: احسب طول قطره أَ جـ



نصل أَ ب من فيتاغورس

(أ أَ)^{٢} = (أَ ب)^{٢} + (أ ب)^{٢}

(١٠)^{٢} = (أَ ب)^{٢} + (٦)^{٢}

(أَ ب)^{٢} = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ لكن أَ ب ⊥ ب جـ كون ب جـ ⊥ المستوى أ أَ بَ ب الذي عموي أَ ب.

∴ فيتاغورس مرة أخرى

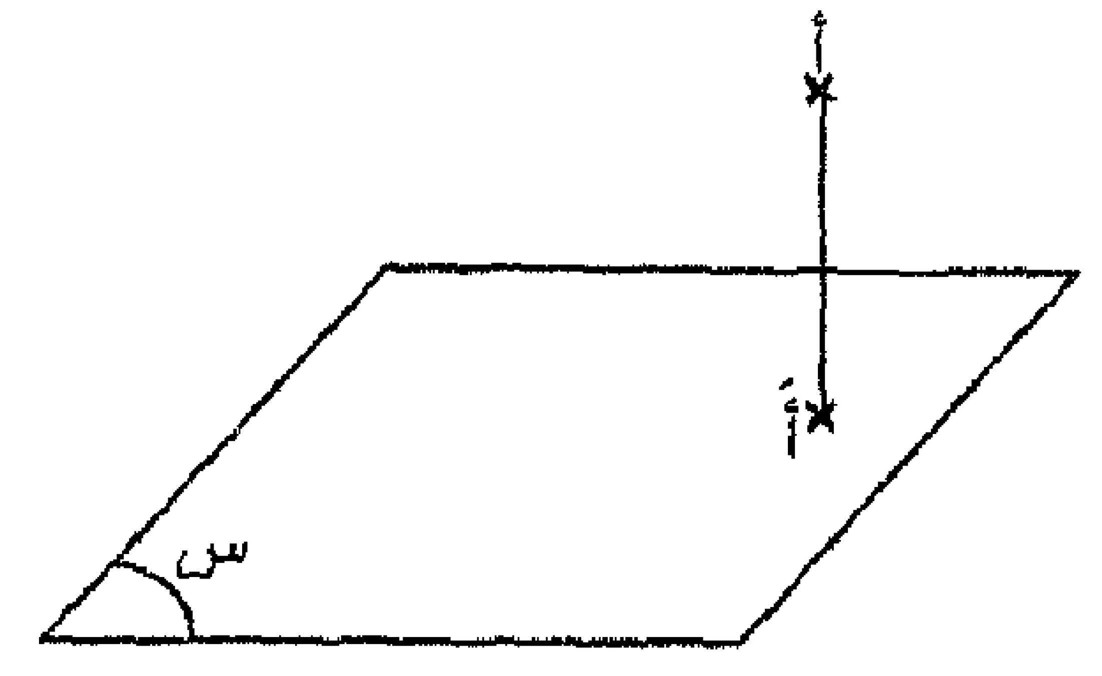
(أَجـ)^{٢} = (أَ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٦٤ + (٨)^{٢} = ٦٤ + ٦٤ = ١٢٨

ومنها أَ جـ = $\sqrt{١٢٨}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ سم.

(٤) الإسقاط العمودي Perpendicular Projection

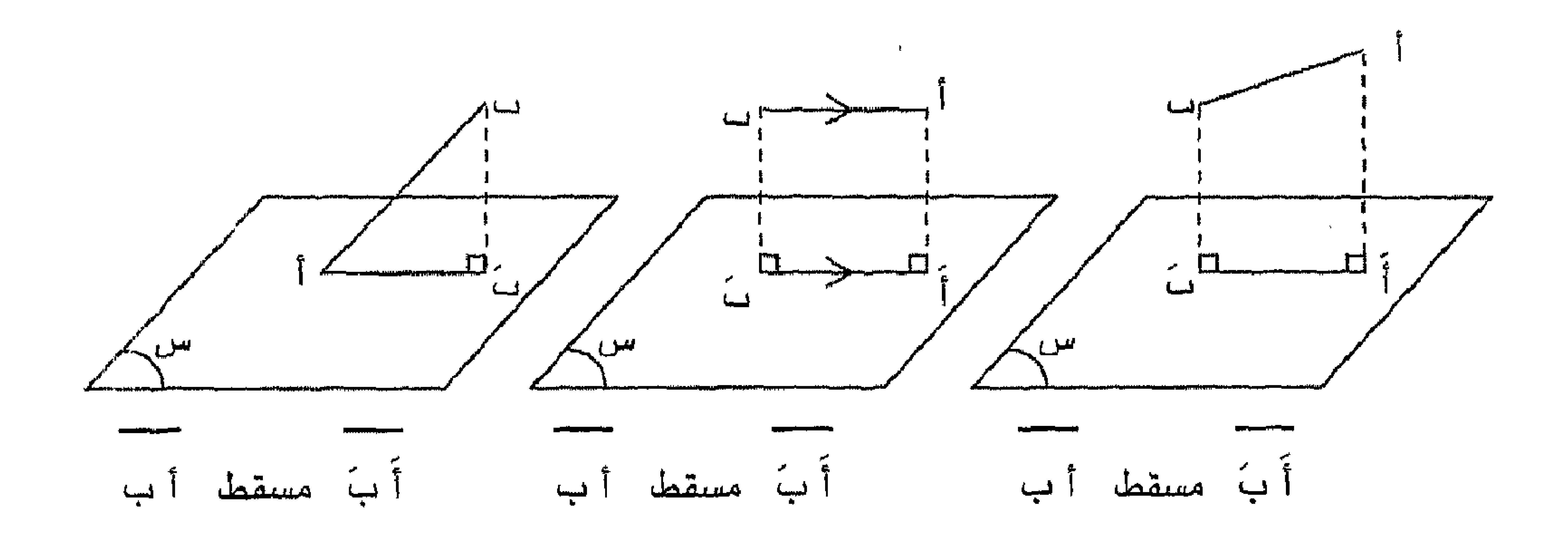
ونظرياته:

إن المسقط العمودي لنقطة مثل أ خارج مستوى مثل س هي النقطة أَ الواقعة على المستوى س والناتجة عن تقاطع المستقيم المار بالنقطة أ والعمودي على المستوى س كما في الشكل.

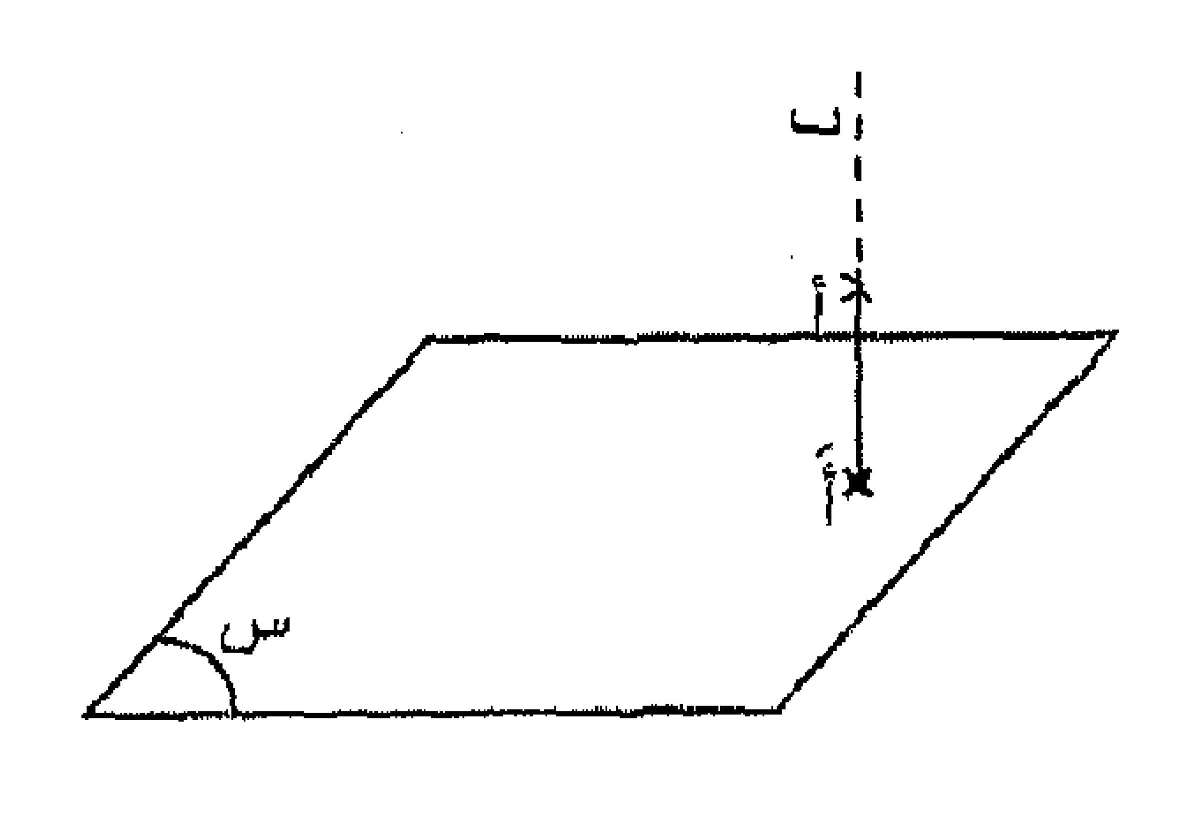


حيث النقطة أَ هي المسقط العمودي للنقطة أ

ومسقط قطعة مستقيمة مثل $\overleftrightarrow{أب}$ على مستوى معلوم مثل س هو مجموعة المساقط العمودية للنقط المكونة للقطعة المستقيمة $\overleftrightarrow{أب}$ على المستوى س كما في الأشكال التالية ولعدة أوضاع:



📄 **ملحوظة هامة:**

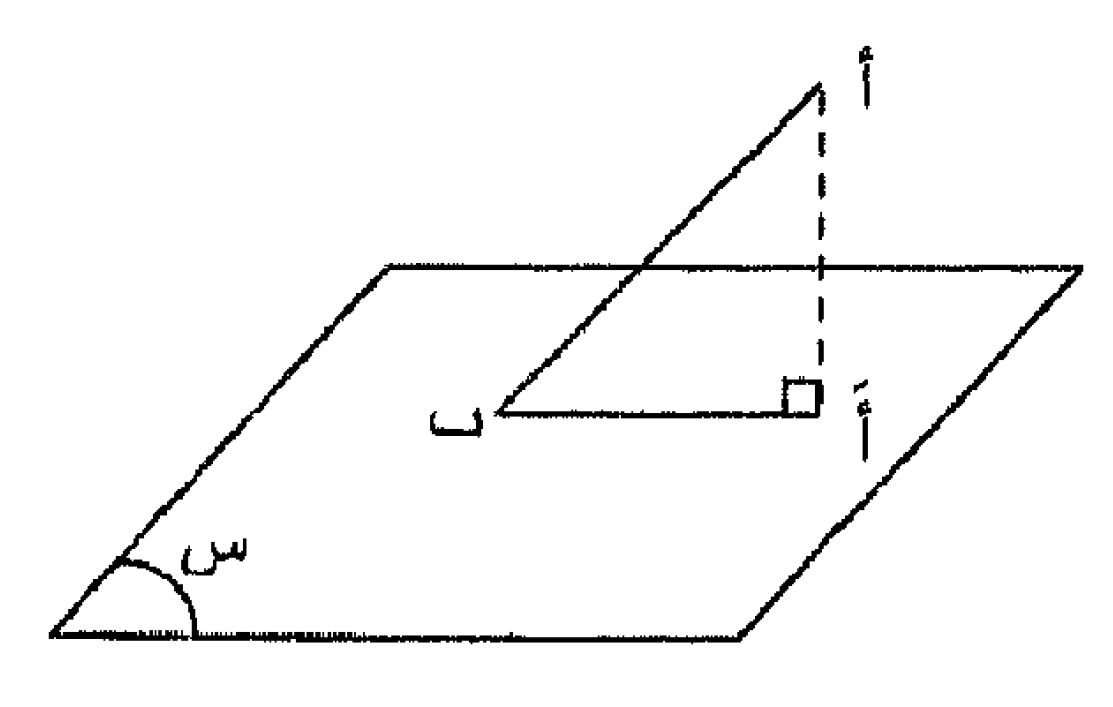


ويمكن ملاحظة أن مسقط نقطة هو نقطة ومسقط قطعة مستقيمة هو قطعة مستقيمة إلا في حالة واحدة عندما القطعة

المستقيمة تعامد المستوى فمسقطها نقطة ← ظهر كنقطة أَ كما في الشكل أعلاه.

أَ مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ ، أَ مسقط القطعة أ ب ⊥ المستوى س.

هذا وتسمى القطعة المستقيمة (أو المستقيم) الواصلة بين أي نقطة مثل أ خارج المستوى وأي من نقاط المستوى (عدا مسقط أ) مائلاً على المستوى كما في الشكل تسمى القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ مائل على المستوى س.



أي أن:

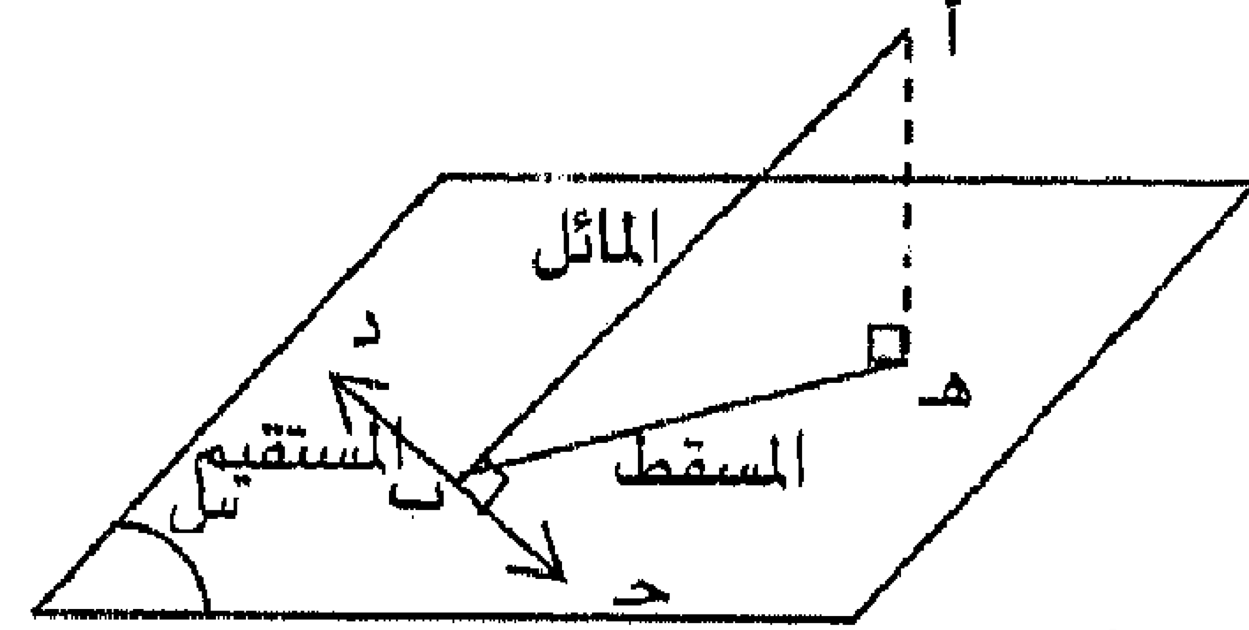
$\overleftrightarrow{\text{أ أَ}}$ ⊥ المستوى س

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مائل على المستوى س.

نظرية ١:

«نظرية الأعمدة الثلاثة»

إذا مُدّ مستقيم من نقطة خارج مستوى مثل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، وكان المستقيم المائل عمودياً على مستقيم في المستوى (مثل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$)، فإن مسقط المستقيم المائل يكون عمودياً على هذا المستقيم (مثل $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$)



أي أن $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

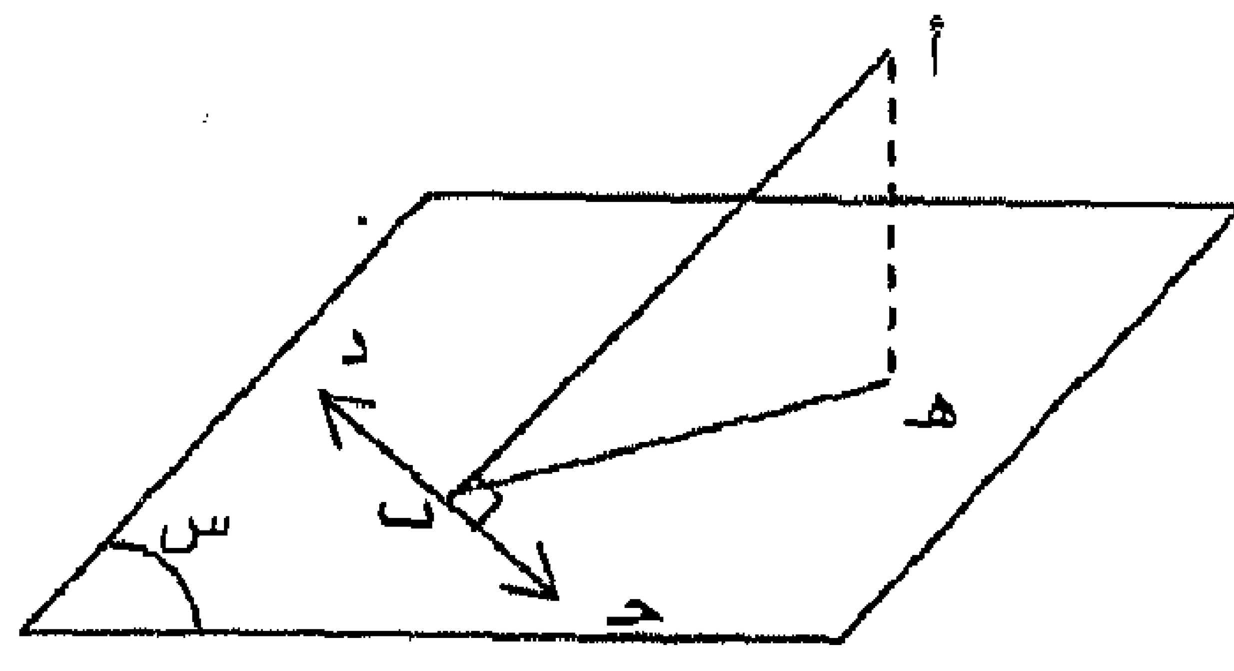
أي أن المسقط ⊥ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

«وعكس النظرية صواب»

وتقول:

إذا مدَّ مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى ليلاقي مستقيماً معلوماً في

المستوى وكان مسقط المستقيم المائل عمودياً على المستقيم المعلوم فإن المستقيم المعلوم يكون عمودياً أيضاً على هذا المستقيم.



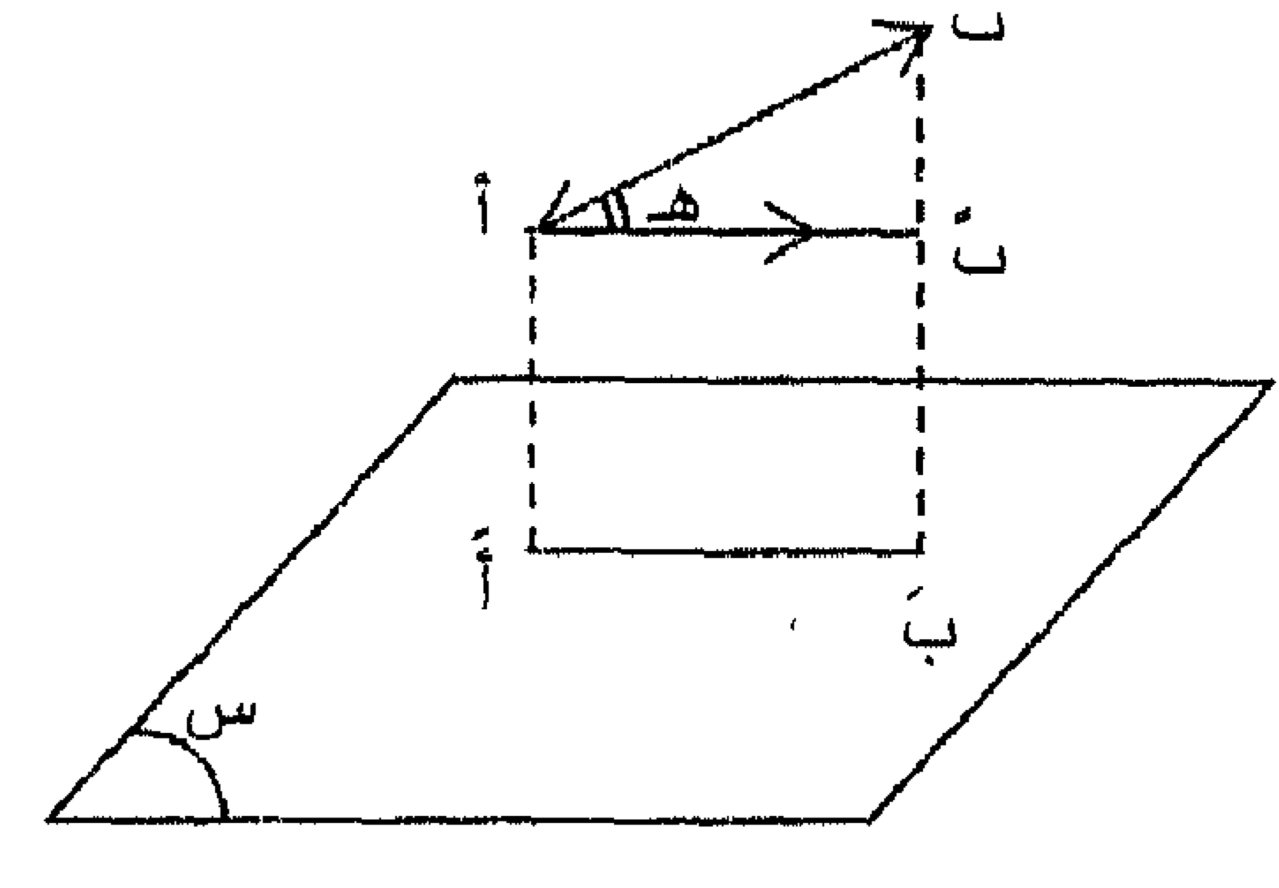
كما في الشكل

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

أي أن المائل $\perp$ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

نظرية ٢ :

الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه العمودي على المستوى المذكور.



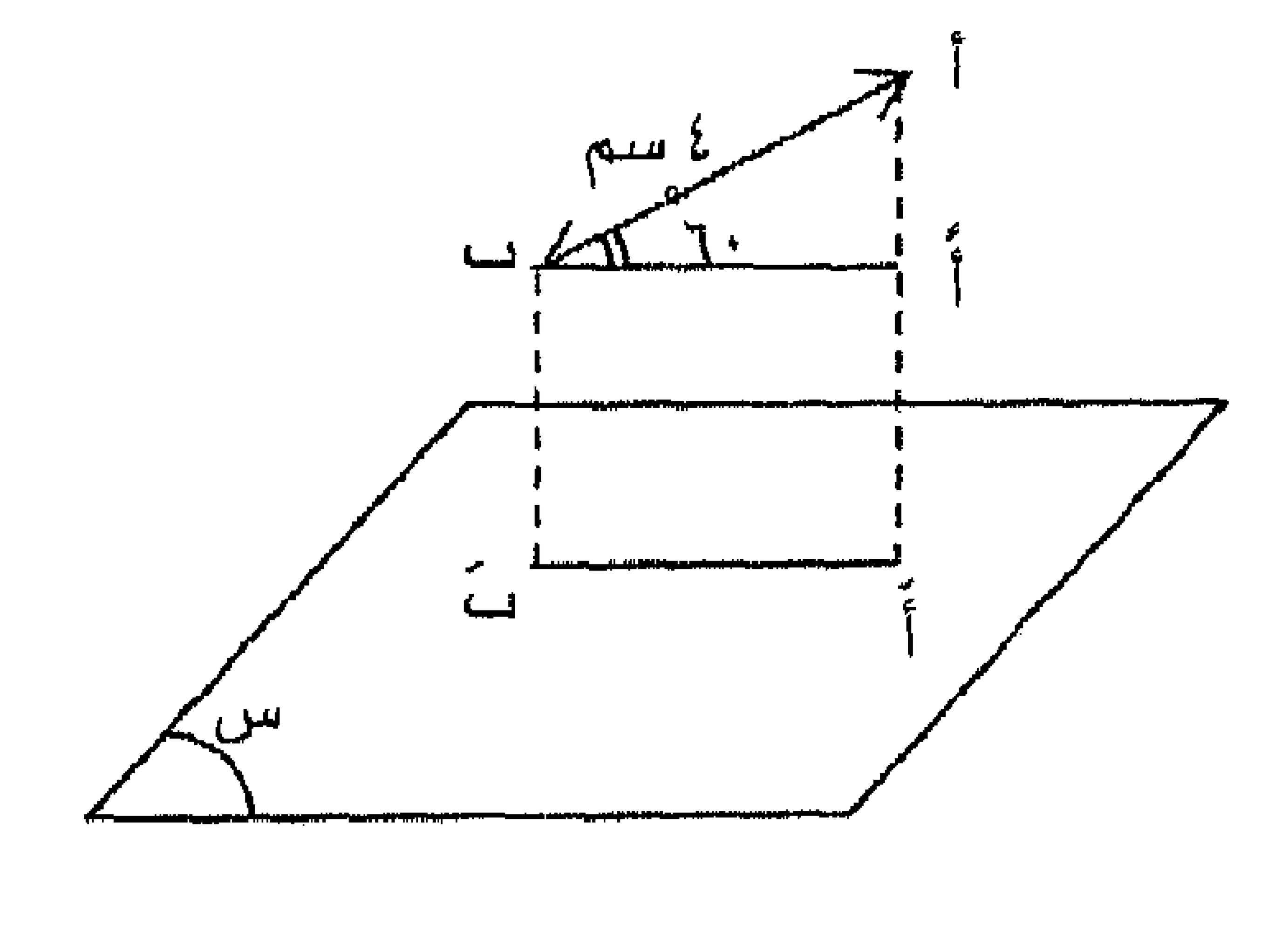
كما في الشكل

الزاوية بين المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ والمستوى س هي الزاوية بين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أَ بَ}}$

وهي الزاوية

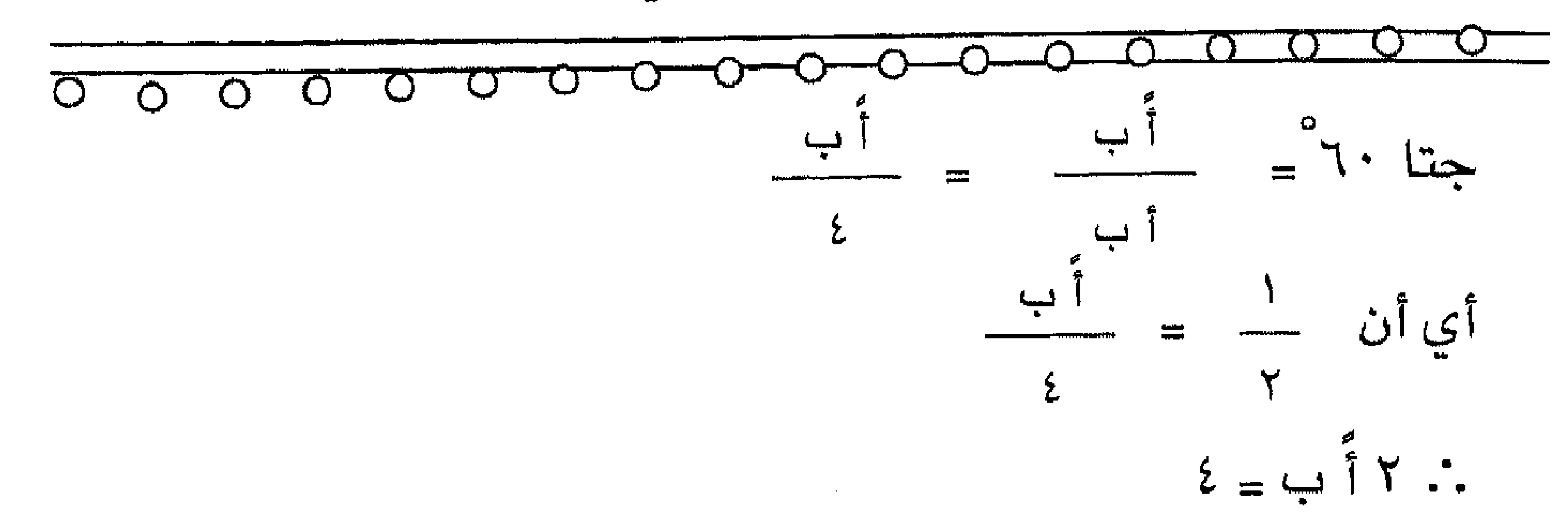
$\measuredangle$ ب أ بً حيث $\overleftrightarrow{\text{أ بً}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

= $\measuredangle$ هـ



⇦ مثال: إذا كانت الزاوية بين قطعة مستقيمة أب = ٤ سم وبين مستوى س هي ٦٠° احسب طول مسقط القطعة على المستوى أَ بَ.

$\overline{\text{أَ بَ}}$ // أً ب



جتا ٦٠° = $\frac{\text{أً ب}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{أً ب}}{٤}$

أي أن $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{أً ب}}{٤}$

∴ ٢ أً ب = ٤

أً ب = $\frac{١}{٤}$ = ٢ سم فقط.

⇦ مثال: أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ ،

والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ مستوى المثلث

إذا كان أ ب = ٢ سم

أ جـ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

أ د = ٤ سم

جد قياس الزاوية الزوجية (ب، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ)

الحل:

نسقط من أ العمود $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ على $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، نصل ب هـ

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مستقيم في المستوى س وعمودي على أ جـ د

$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مستقيم في المستوى ص و عمودي على المستوى فهو عمودي على $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ أيضاً .

"عكس النظرية"

لذا تكون الزاوية أ هـ ب هي قياس الزاوية الزوجية (ب، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ)

والمثلث هـ أ ب قائم الزاوية في أ

لذا فإن (ب هـ^2) = (أ هـ^2)+ (أ ب^2) (فيثاغورس)

لكن لإيجاد (أ هـ^2) نجد جـ د أولاً.

(جـ د^2) = (أ جـ^2) + (أ د^2) = ($٤\sqrt{٣}$)^2 + (٤)^2 = ٤٨ + ١٦

= $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم.

لكن مساحة المثلث أ جـ د نجدها ونبين كما يلي:

مساحة أ جـ د = $\frac{١}{٢}$ أجـ × أجـ × أ د = $\frac{١}{٢}$ جـ د × أ هـ

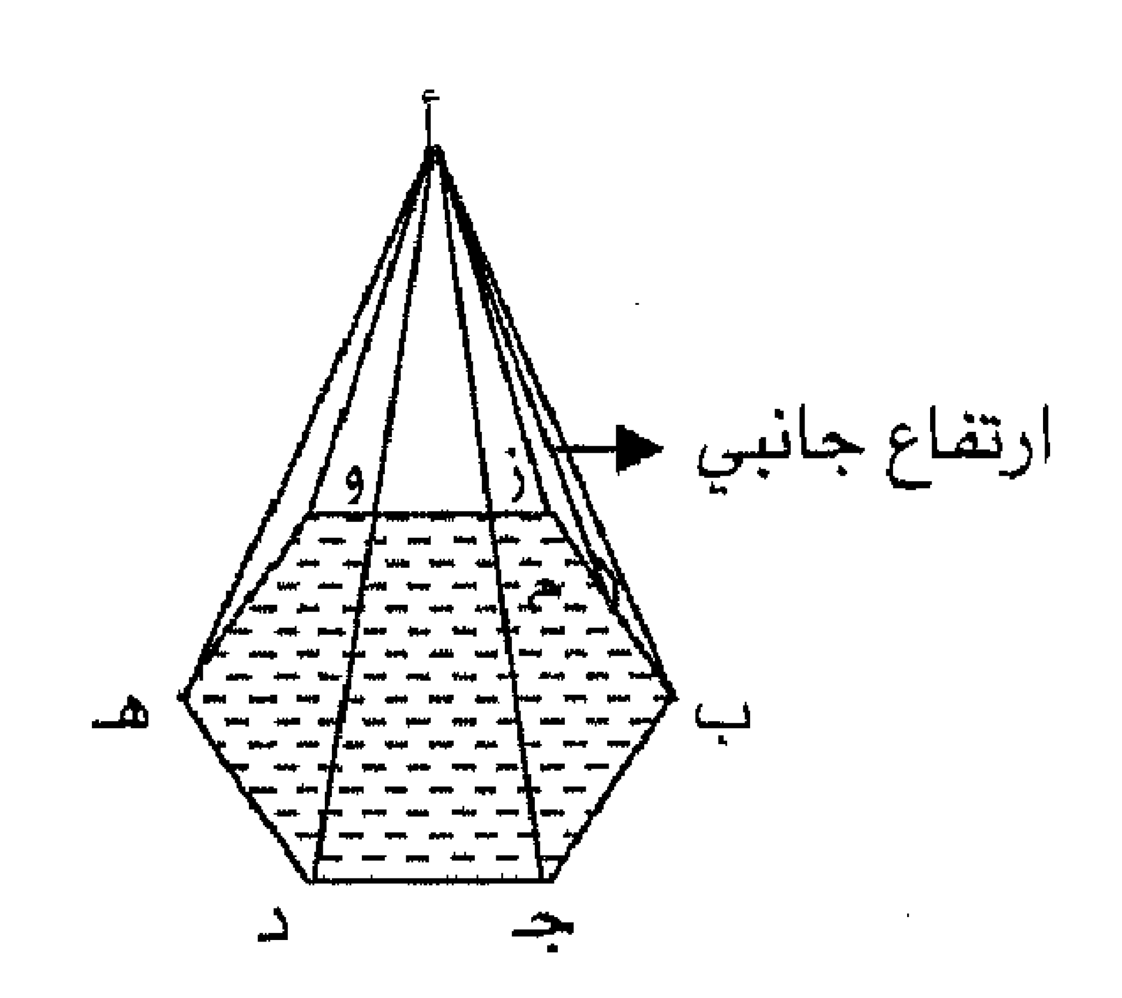
(المساحة = نصف القاعدة × الارتفاع)

$٤\sqrt{٣}$ × ٤ = ٨ × أ هـ ← أ هـ = $\frac{٤\sqrt{٣} \times ٤}{٨}$ =$٢\sqrt{٣}$

والآن ظا (أ هـ ب) $\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ∡ أ هـ ب = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ (وهو قياس الزاوية الزوجية المطلوبة)

(١٤ ـ ٥) أمثلة محلولة على الهندسة الفضائية



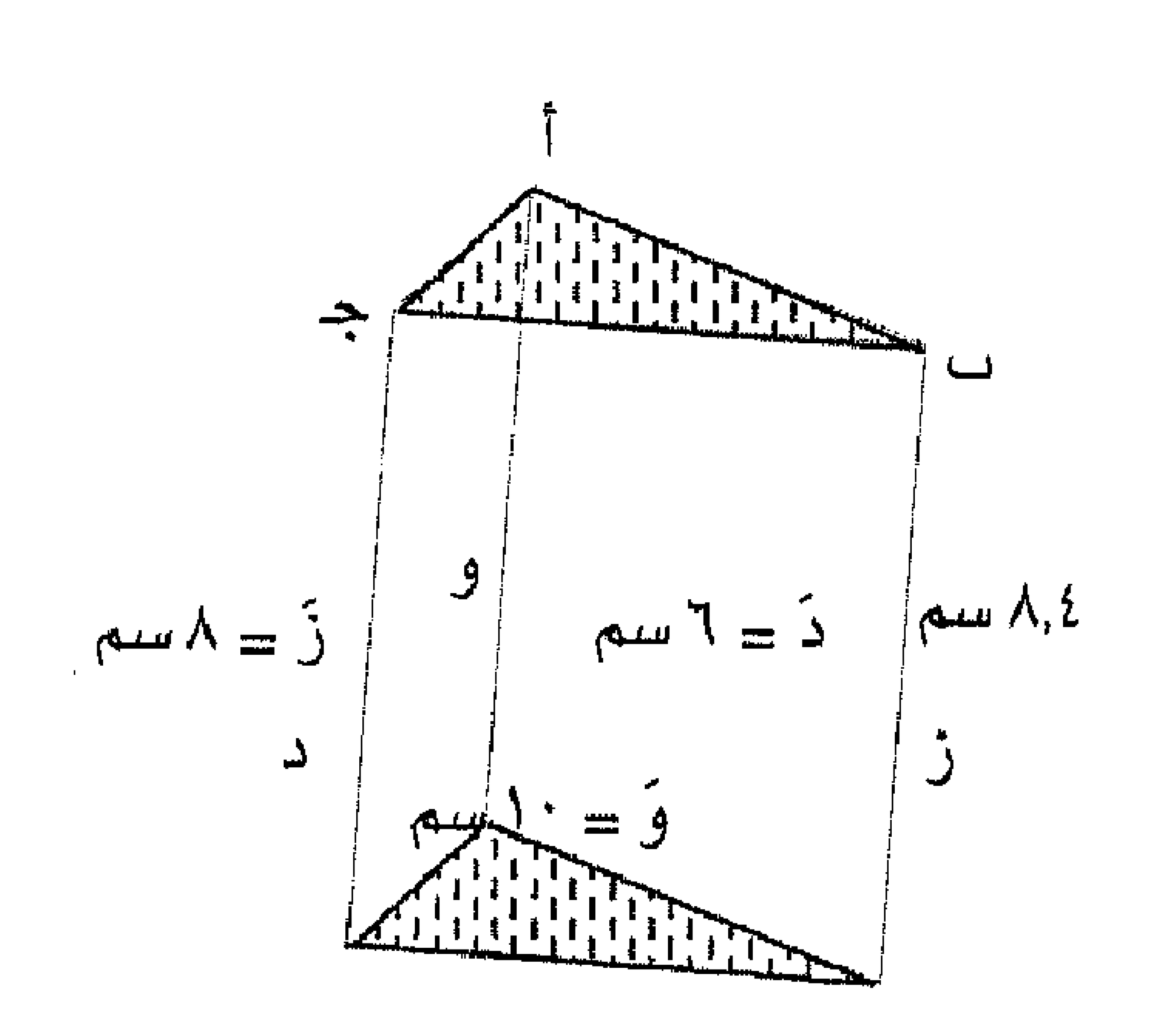
⇦ مثال ١: ما المساحة الجانبية لهرم سداسي قائم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه الجانبي ٢٠, سم ؟

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

وحيث أن د سم = ١٠ سم

فإن أ م الارتفاع الجانبي = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم = ($\frac{١}{٢}$) (٣٦) (٢٠) = ٣٦٠ سم^٢



⇦ مثال ٢: موشور ثلاثي قاعدته مثلث أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم وارتفاعه ٨,٤ سم احسب حجمه ومساحته الجانبية والكلية.

نجد أولاً مساحة القاعدة = مساحة المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه

المساحة = $\sqrt{ح (ح - دَ) (ح - وَ) (ح - بَ)}$

حيث ح = نصف المحيط $\frac{وَ + زَ + دَ}{٢}$

= $\frac{٦ + ٨ + ١٠}{٢}$ = ١٢ سم

مساحة المثلث د ب و = $\sqrt{\text{١٢ (١٢ − ١٠) (١٢ − ٨) (١٢ − ٦)}}$

= $\sqrt{\text{(١٢) (٢) (٤) (٦)}}$

= $\sqrt{\text{٢ × ٢ × ٣ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣}}$

= ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢٤ سم^{٢}

∴ حجم الموشور = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٦ + ٨ + ١٠) (٨,٤)

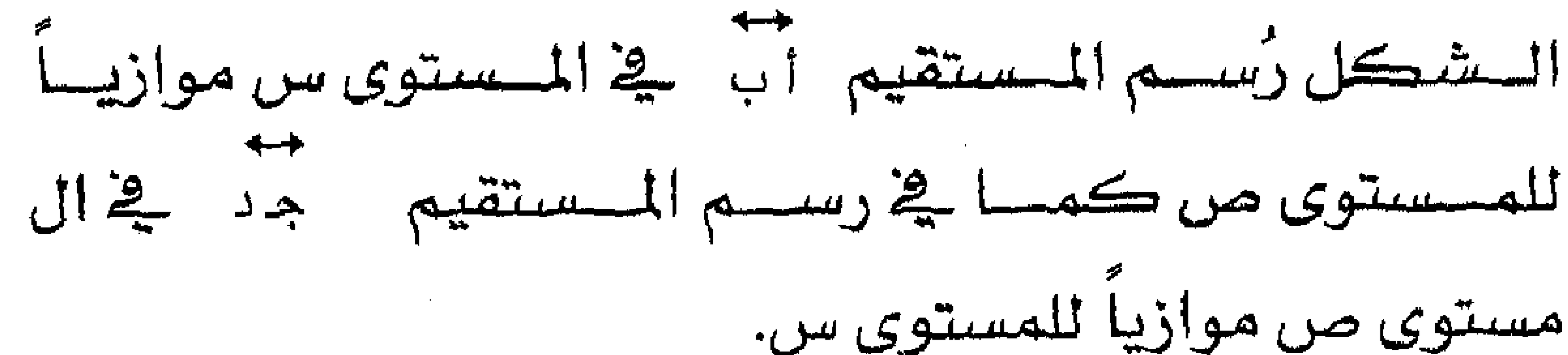
= (٢٤) (٨,٤) = ٢٠١,٦ سم^{٢}

المساحة الكلية = الجانبية + مساحة القاعدتين

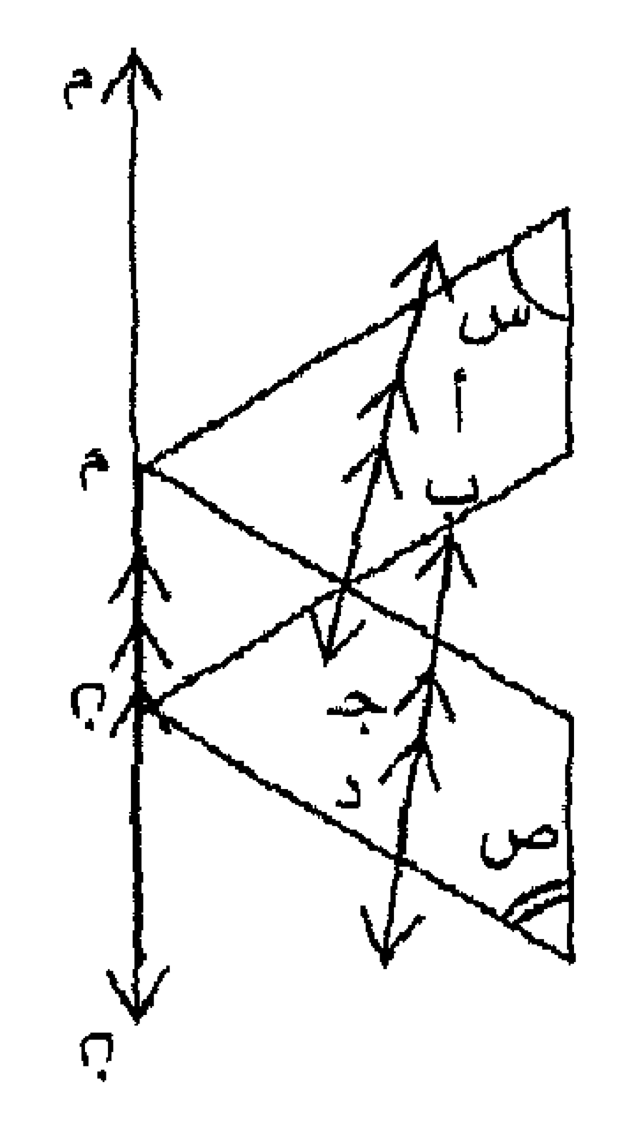
= ٢٠١,٦ + ٢ (٢٤)

= (٢٠١,٦ + ٤٨) = ٢٤٩,٦ سم^{٢}

⇦ مثال ٣: س، ص مستويان متقاطعان في المستقيم م ؟ كما في



الشكل رُسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى س موازياً للمستوى ص كما في رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ في ال مستوى ص موازياً للمستوى س.



بين أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

الحل: بما أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س فإن

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي خط التقاطع $\overleftrightarrow{\text{م ؟}}$

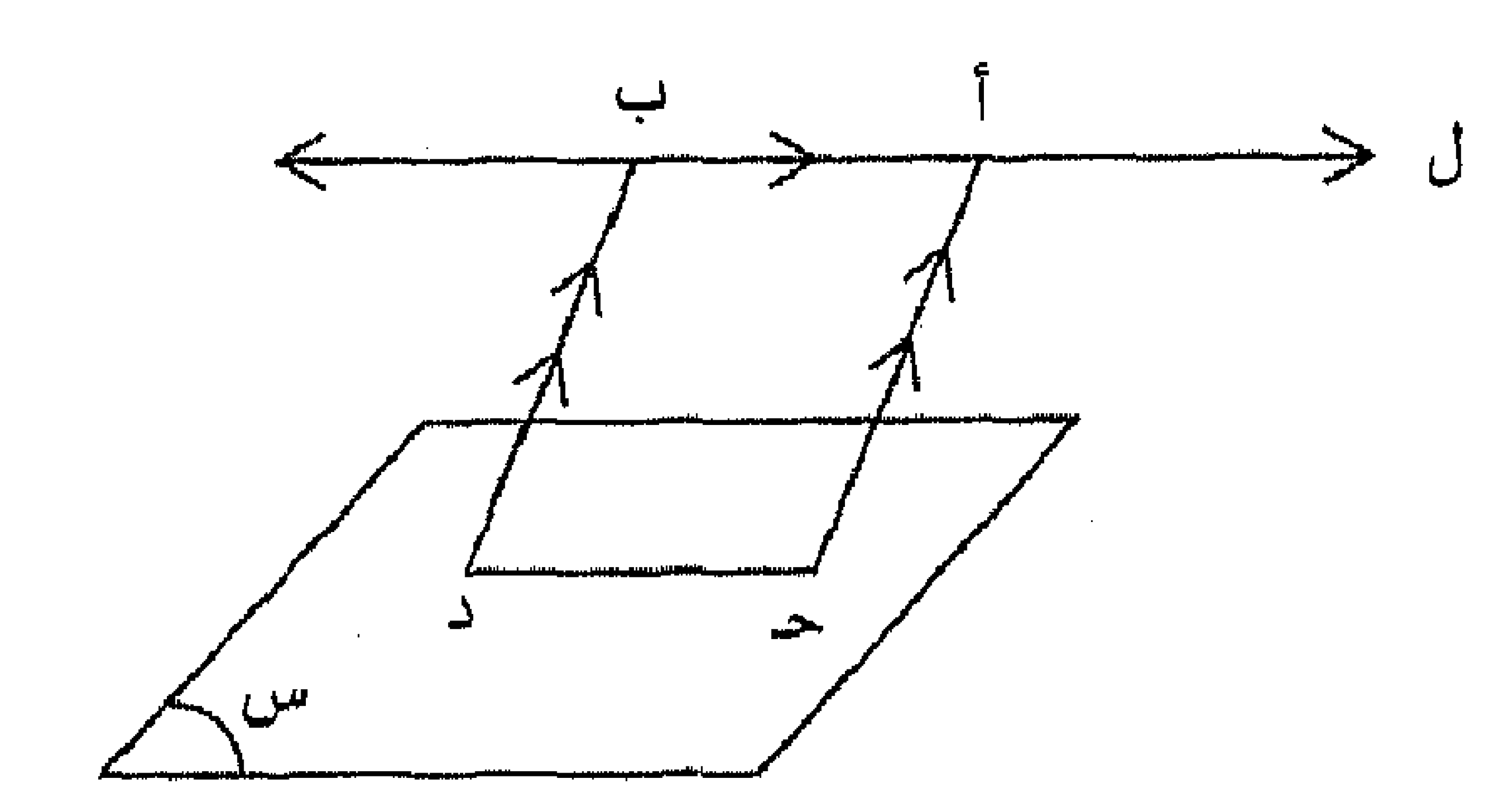
∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م ؟}}$ (١)

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى ص فإن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يوازي خط التقاطع $\overleftrightarrow{\text{م ؟}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{م ؟}}$ (٢)

من (١) ، (٢) فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وهذا المطلوب بيانه

⇦ مثال ٤: أ، ب نقطتان على مستقيم يوازي المستوى س، مر بالنقطتين مستقيمان متوازيان قطعا المستوى في النقطتين جـ، د بين لماذا أ جـ = ب د، أ ب = جـ د



الحل:

حيث أن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // المستوى س

فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // أي مستقيم في المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

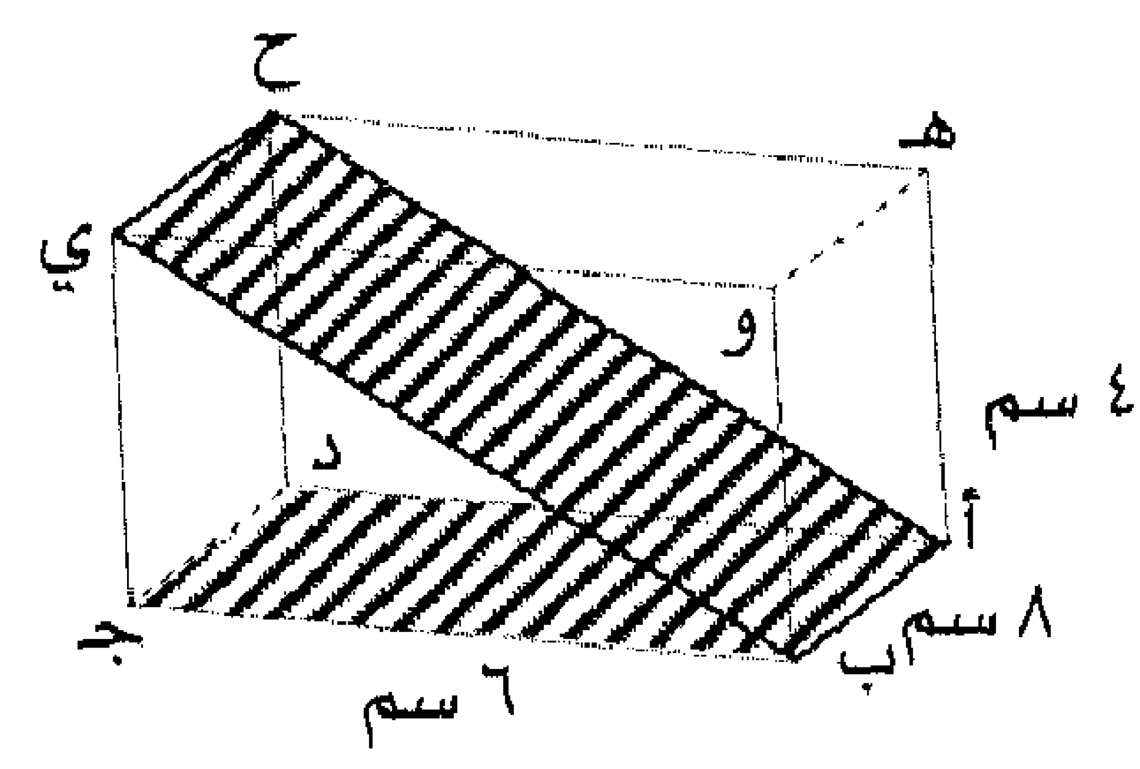
لكن $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ من المعطيات

∴ الشكل أ جـ د ب متوازي أضلاعه

ومن خواصه «كل ضلعين متقابلين متساويين» لذا فإن أ جـ = ب د، أ ب = جـ د

⇦ مثال ٥: الشكل المجاور يمثل متوازي مستطيلات أ ب جـ د هـ و ي ح فيه أ ب = ٨ سم، ب جـ = ٦ سم، أ جـ = ٤ سم.

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ، أ ب ح



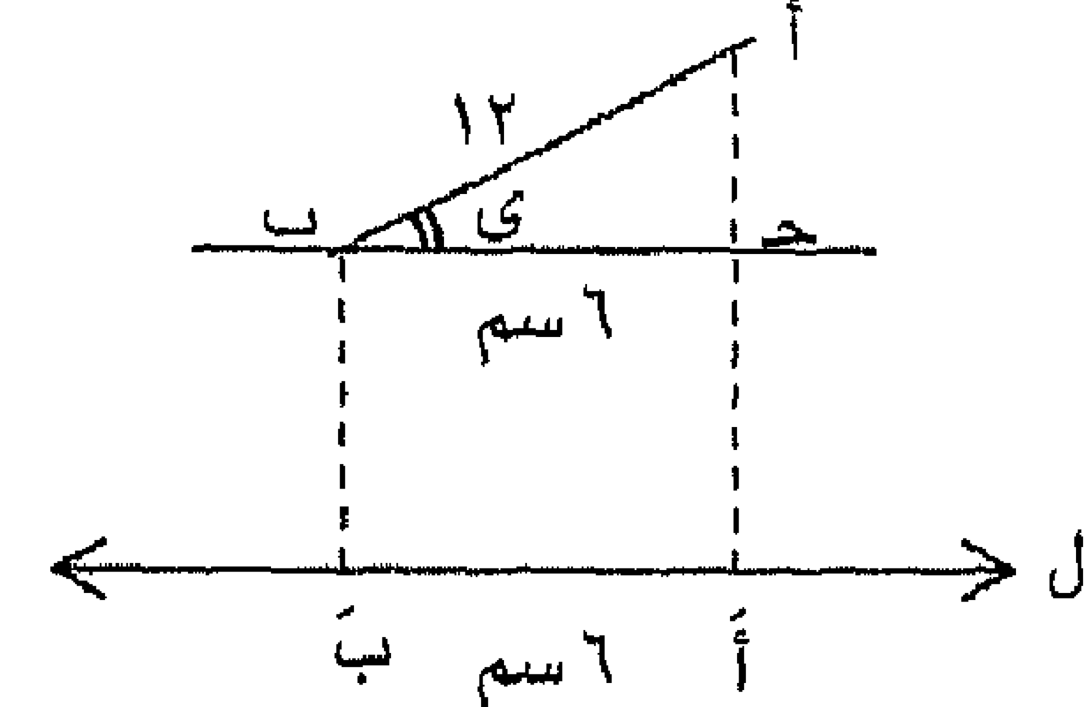
الحل: الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ، أ ب ح هي الزاوية.

ح ⟵ أب ⟵ جـ ومنها

ظا الزاوية الزوجية = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{\text{جـ ي}}{\text{ب جـ}}$

= $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ = ٠,٦٦٦٧ ومنها قياس الزاوية الزوجية = °٣٣,٥ بواسطة الآلة الحاسبة.

⇦ مثال ٦: أ ب قطعة مستقيمة طولها ١٢ سم وطول مسقطها أَ بَ على مستقيم ما هو ٦ سم.



احسب الزاوية بين القطعة أ ب ومسقطها أَ بَ

الحل:

نرسم من ب مستقيماً يوازي ل

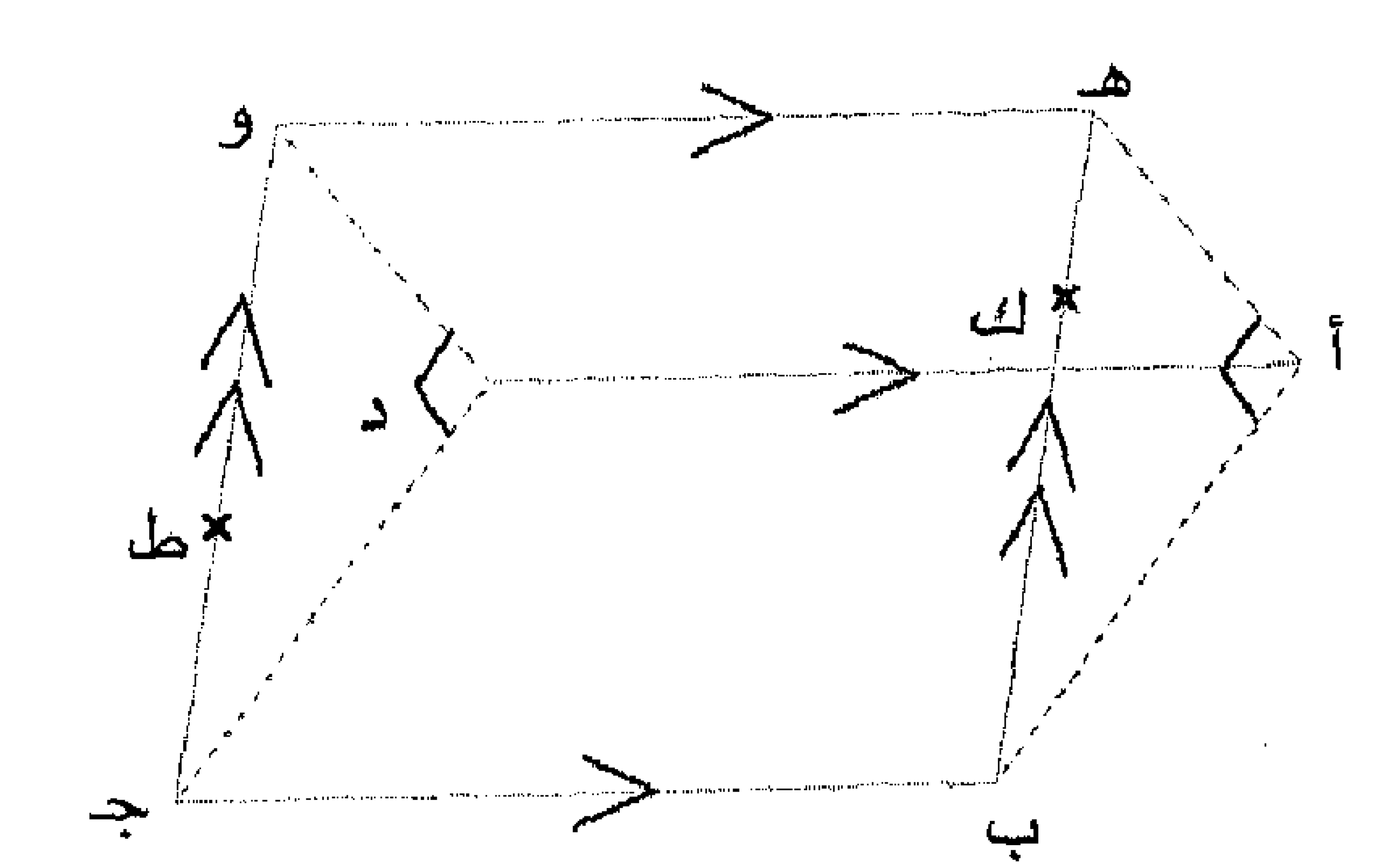
∴ ب جـ = ٦ سم

وحيث ∢ ي هي المحصورة بين القطعة أ ب والمستقيم ل فإن:

جتاي = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ي = °٦٠ الزاوية المحصورة بين القطعة ومسقطها.

⇦ مثال ٧: اعتماداً على الشكل المجاور أجب بنعم أو لا فقط.



«١» النقط أ، ب، هـ مستقيمة.

الجواب ⟵ لا

«٢» النقط أ ، ب ، ك مستوية

الجواب ← نعم

«٣» المستقيمان ب هـ ، جـ د متوازيان

الجواب ← لا

«٤» المستقيمان أ هـ ، جـ د متوازيان

الجواب ← نعم

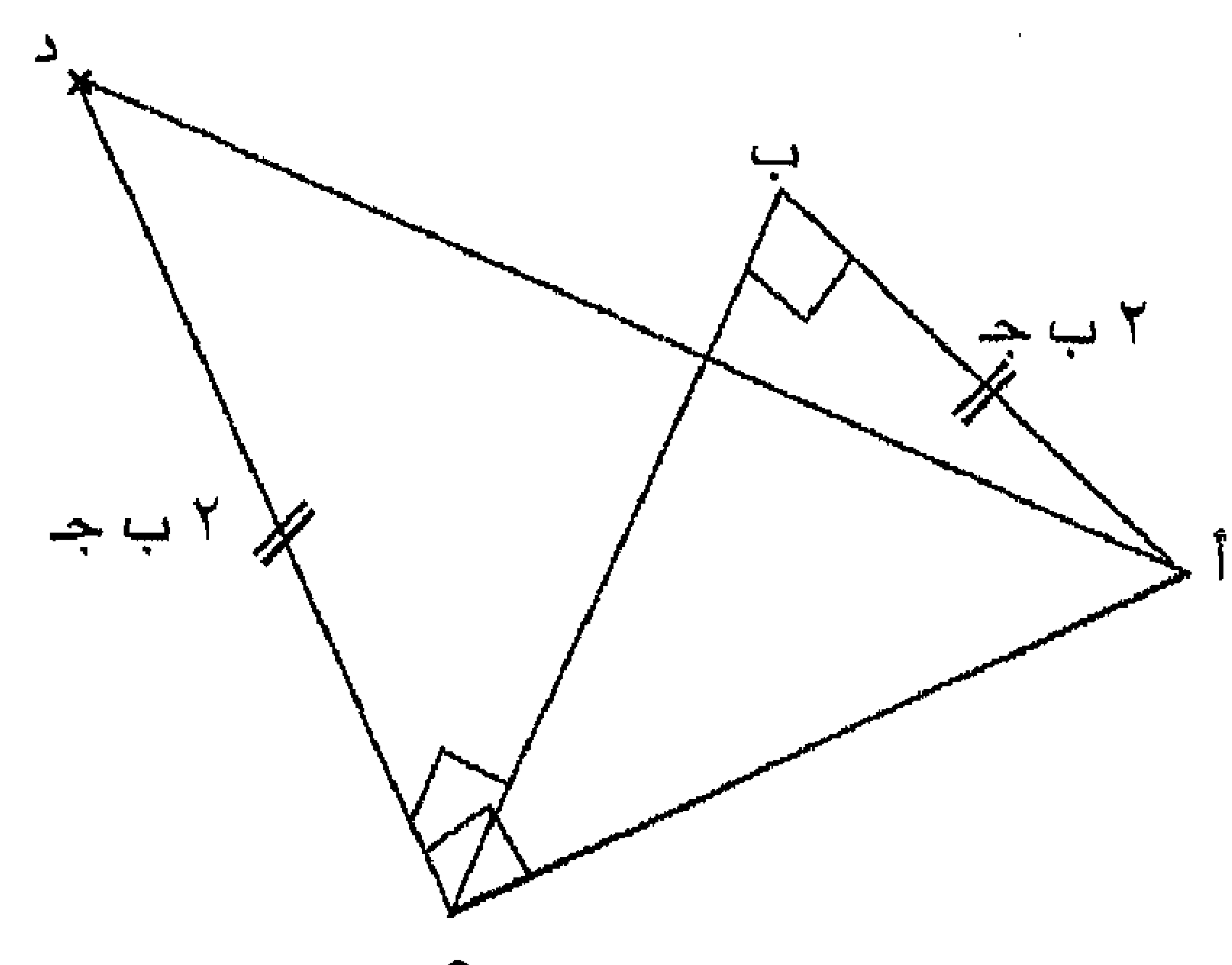
«٥» المستقيمان أ د ، جـ هـ متخالفان

الجواب ← نعم

⇦ مثال ٨ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٢ ب جـ ، أقيم من جـ عموداً على مستوى المثلث وعُينت عليه النقطة د بحيث أن

جـ د = ٢ ب جـ

بين أن أ د = ٣ ب جـ



بما أن د جـ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ المثلث أ جـ د قائم الزاوية في جـ

وعليه فإن

(أ د)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (د جـ)^{٢} (فيتاغورس)

لكن (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} (فيتاغورس)

= (٢ ب جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٤ (ب جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٥ ب جـ^{٢}

∴ (أ د)^{٢} = ٥(ب جـ)^{٢} + (د جـ)^{٢}

لكن (د جـ)^{٢} = (٢ ب جـ)^{٢} = ٤(ب جـ)^{٢}

∴ (أ د)^{٢} = ٥(ب جـ)^{٢} + ٤(ب جـ)^{٢} = ٩(ب جـ)^{٢}

∴ أ د = $\sqrt{٩(ب جـ)^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$ × $\sqrt{(ب جـ)^{٢}}$

= ٣ ب جـ وهو المطلوب بيانه

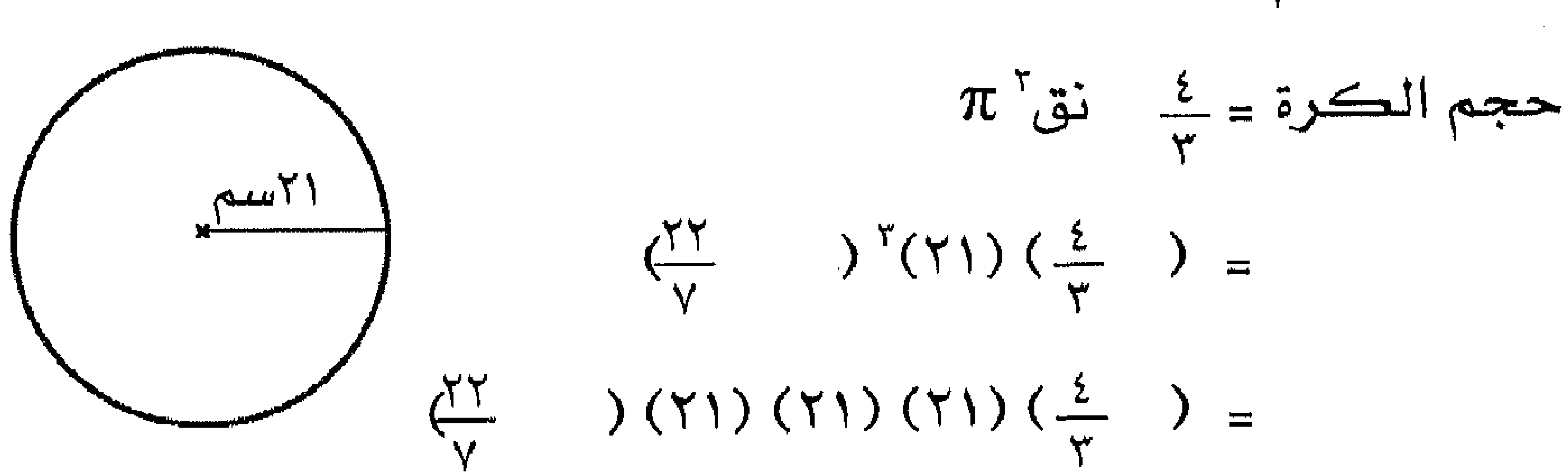
⇦ مثال ٩: ما حجم (١) كرة نصف قطرها ٢١ سم ؟

(٢) قطاع كروي فيها ارتفاعه ١٥ سم ؟

(٣) قطعة كروية فيها ارتفاعها ٦ سم ؟

اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٢} π

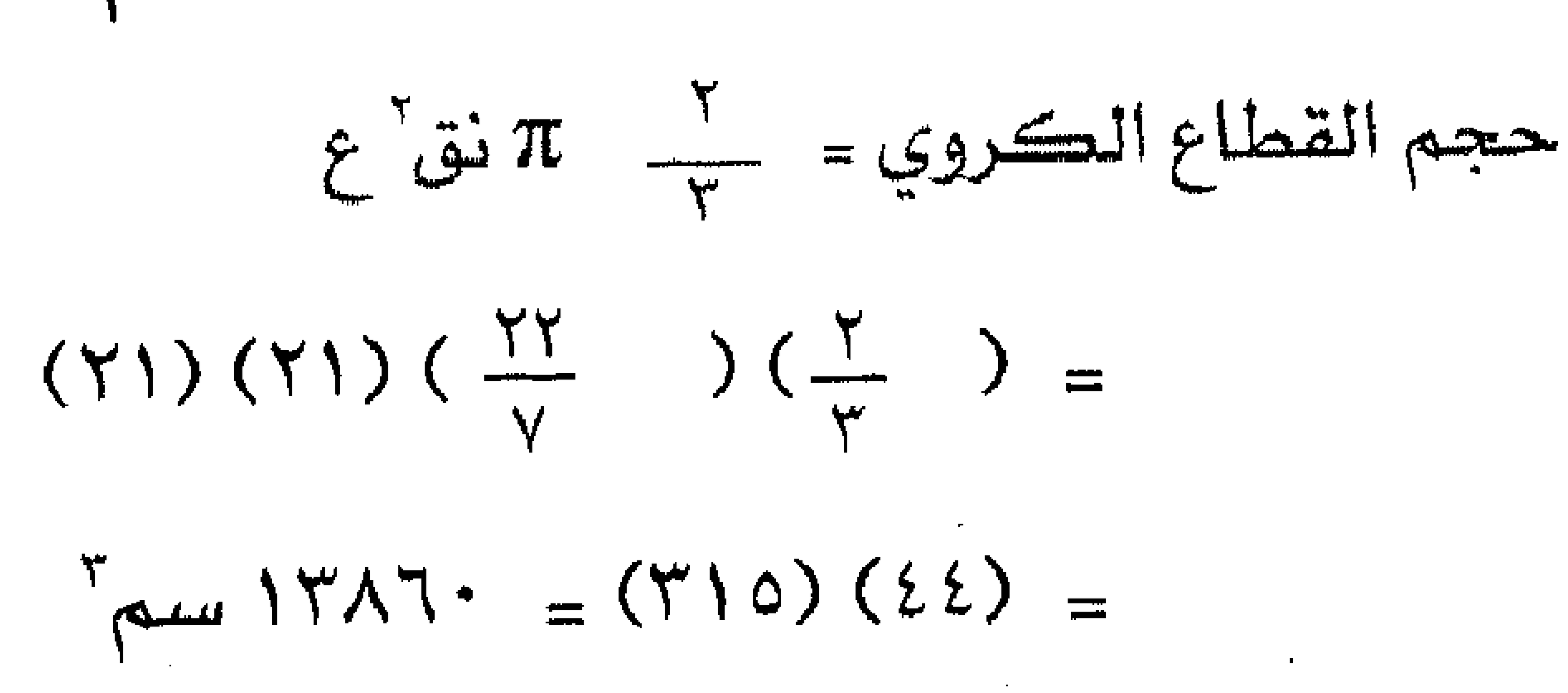


= ($\frac{٤}{٣}$) (٢١)^{٣} ($\frac{٢٢}{٧}$)

= ($\frac{٤}{٣}$) (٢١) (٢١) (٢١) ($\frac{٢٢}{٧}$)

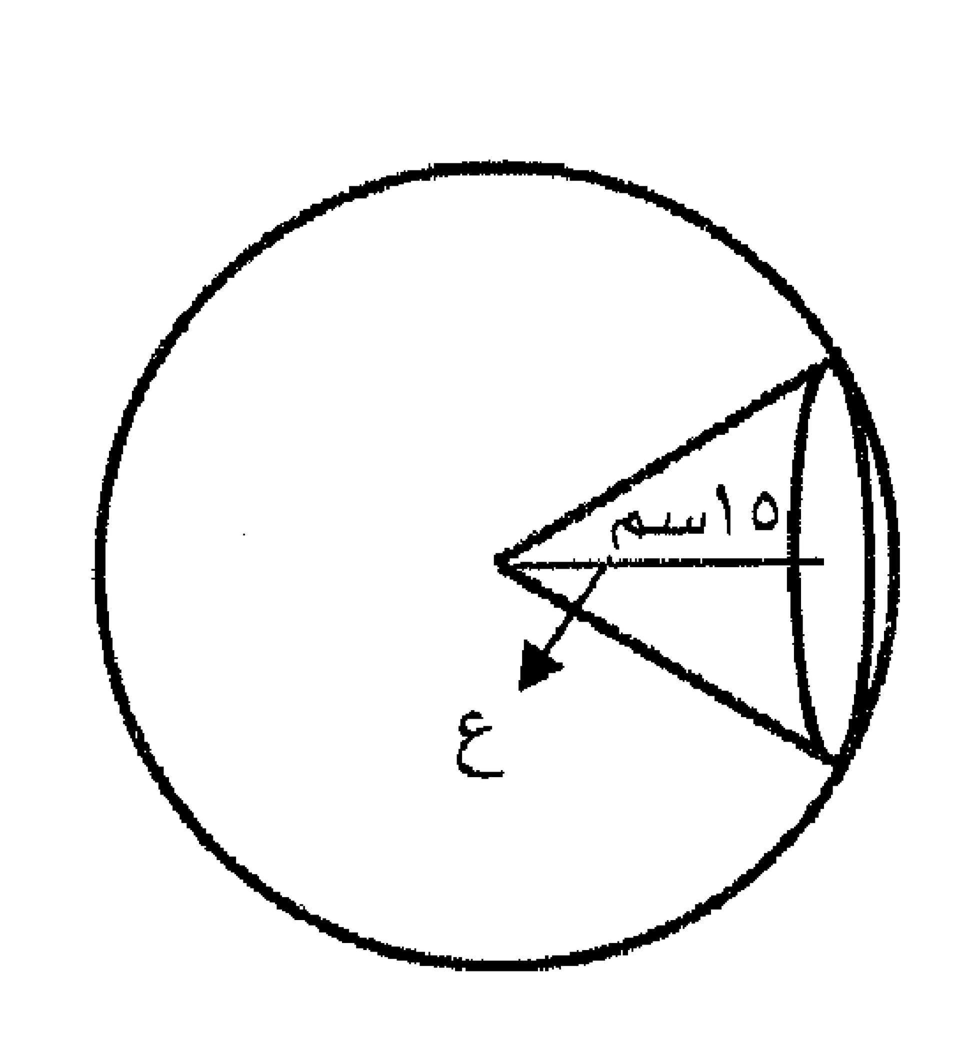
= (٨٤) (٤٦٢) = ٣٨٨٠٨ سم^{٣}

حجم القطاع الكروي = $\frac{٢}{٣}$ π نق^{٢} ع



= ($\frac{٢}{٣}$) ($\frac{٢٢}{٧}$) (٢١) (٢١)

= (٤٤) (٣١٥) = ١٣٨٦٠ سم^{٣}



حجم القطعة الكروية = $\frac{1}{3}$ π ع^{2} (٣ نق – ع)

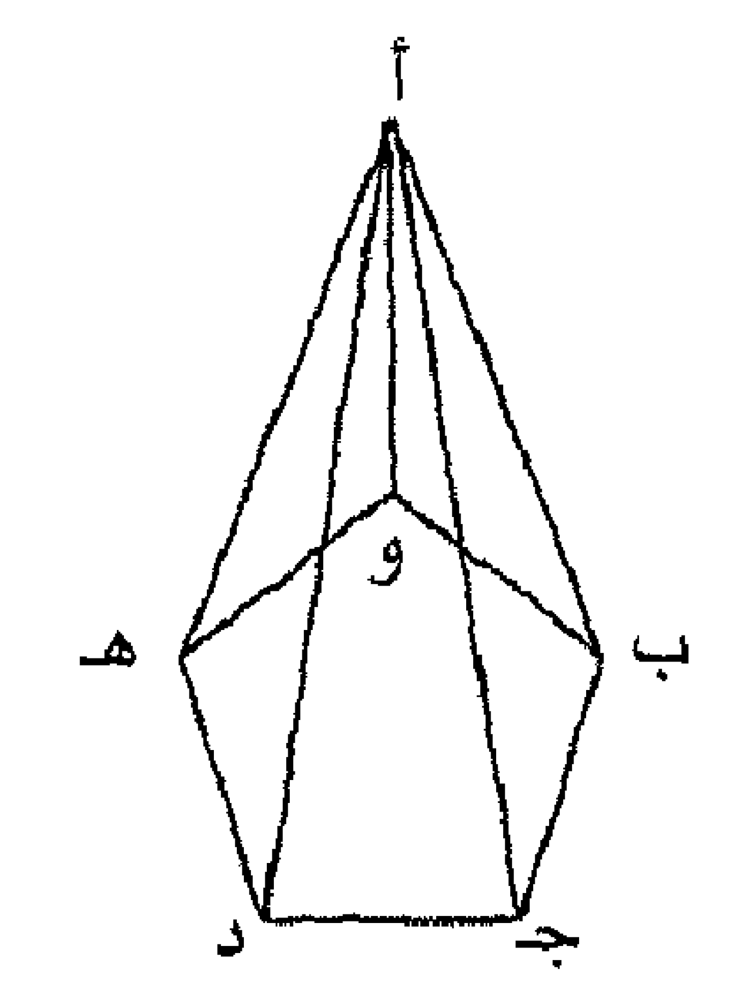
= ($\frac{1}{3}$) ($\frac{22}{7}$) (٦) (٦) (٣ × ٢١ – ٦)

= $\frac{(22)\ (36)\ (63 - 6)}{21}$

= $\frac{(22)\ (36)\ (57)}{21}$

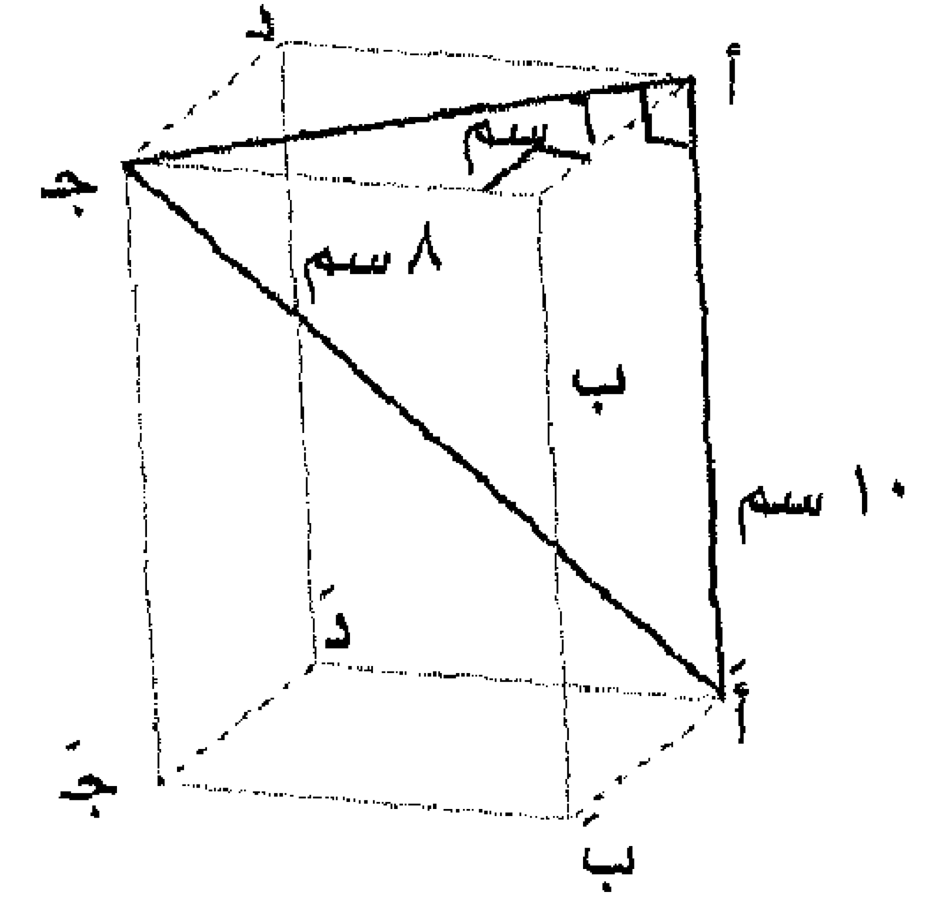
= $\frac{15048}{7}$

= ٢١٤٩,٧ سم^{3}



⇦ مثال ١٠: الشكل يمثل هرماً خماسياً قائماً

أعط مثالاً واحداً على كل من



(١) مستقيمين متقاطعين

الجواب ⟵ أ ب، أ جـ

(٢) مستقيمين متخالفين

الجواب ⟵ جـ د، أ و

(٣) مستقيمين متوازيين

الجواب ⟵ لا يوجد

⇦ مثال ١١: أ ب جـ د أَ بَ جَ دَ متوازي مستطيلات فيه أ أَ = ١٠ سم، أ ب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم

احسب طول قطره أَ جـ

الحل: نصل أ جـ

بما أن أَ أ ⊥ المستوى أ ب جـ د

∴ أ أَ ⊥ أ جـ (حيث أ جـ واقع في المستوى أ ب جـ د)

∴ المثلث أَ أ جـ قائم الزاوية ومنه

$(أَ جـ)^2 = (أَ أ)^2 + (أ جـ)^2$ (فيتاغورس)

لكن $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (أ ب جـ قائم الزاوية)

∴ $(أَ جـ) = (١٠)^2 + (٦)^2 + (٨)^2$

$= ١٠٠ + ٣٦ + ٦٤$

$= ٢٠٠$

∴ $أَ جـ = \sqrt{٢٠٠} = \sqrt{١٠٠ \times ٢} = ١٠ \sqrt{٢}$

$= ١٠ (١,٤١٤) = ١٤,١٤$ سم.

⇦ مثال ١٢: أ ب قطعة مستقيمة نصفت بالنقطة جـ كما في الشكل ومنه أوجد مسقط النقطة جـ.

الحل:

جـَ: مسقط النقطة جـ كون

مسقط القطعة المستقيمة أ ب هو القطعة المستقيمة أَ بَ

مسقط القطعة المستقيمة جـ ب هو القطعة المستقيمة جـَ بَ

وبما أن أ أَ // جـ جـَ // ب بَ مساقط عمودية على المستوى س.

$$\therefore \quad \frac{ب\ جـ}{ب\ أ} = \frac{بَ\ جـَ}{بَ\ أَ} = \frac{١}{٢}$$

أي أن مسقط منتصف قطعة مستقيمة مثل جـ هو منتصف مسقط القطعة جـَ

⇦ مثال ١٣: أيهما أكبر حجماً؛ اسطوانة نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٧ سم أم مكعب تطول ضلعه ١٦,٥ سم ؟ اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$.

الحل: نجد حجم كلاً منها:

حجم الاسطوانة = نق^{٢} π ع = $(١٤)^{٢}$ $(\frac{٢٢}{٧})$ (٧)

= ١٤ × ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧

= (١٩٦) (٢٢) = ٤٣١٢ سم^{٣}

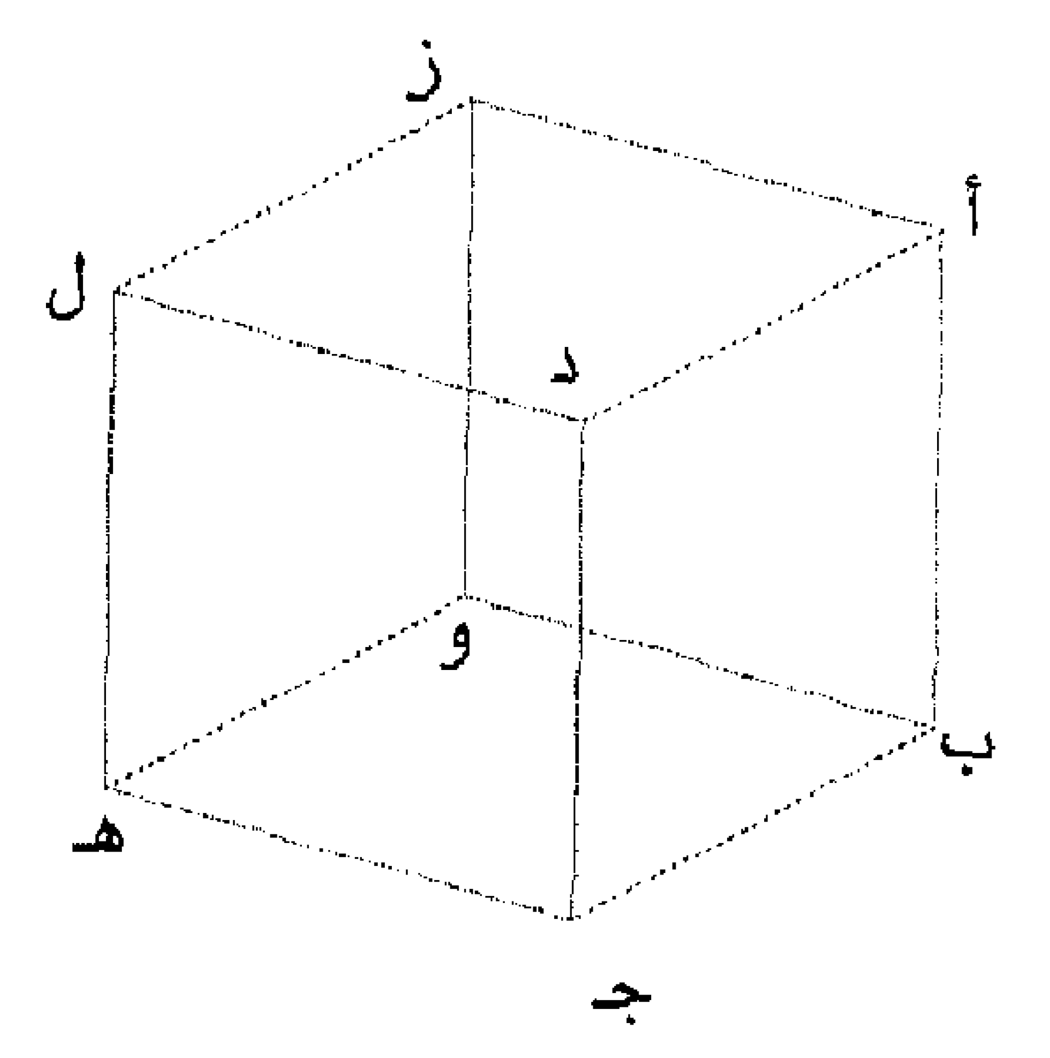
حجم المكعب = (الضلع)^{٣} = $(١٦,٥)^{٣}$

= (١٦,٥) (١٦,٥) (١٦,٥) = ٤٤٩٢,١٢٥ سم^{٣}

∴ حجم المكعب أكبر

⇦ مثال ١٤: من الشكل المجاور والذي يمثل متوازي مستطيلات أذكر


أسماء:




(١) مستويين متوازيين

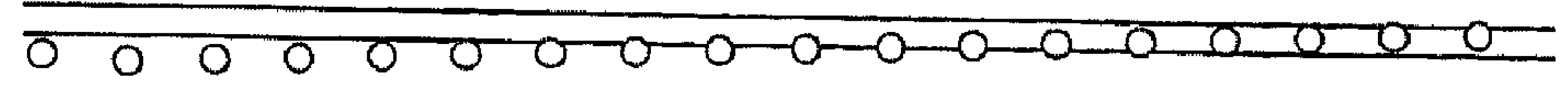
الجواب: أ ب و د، ز و هـ ل

(٢) مستويين متعامدين

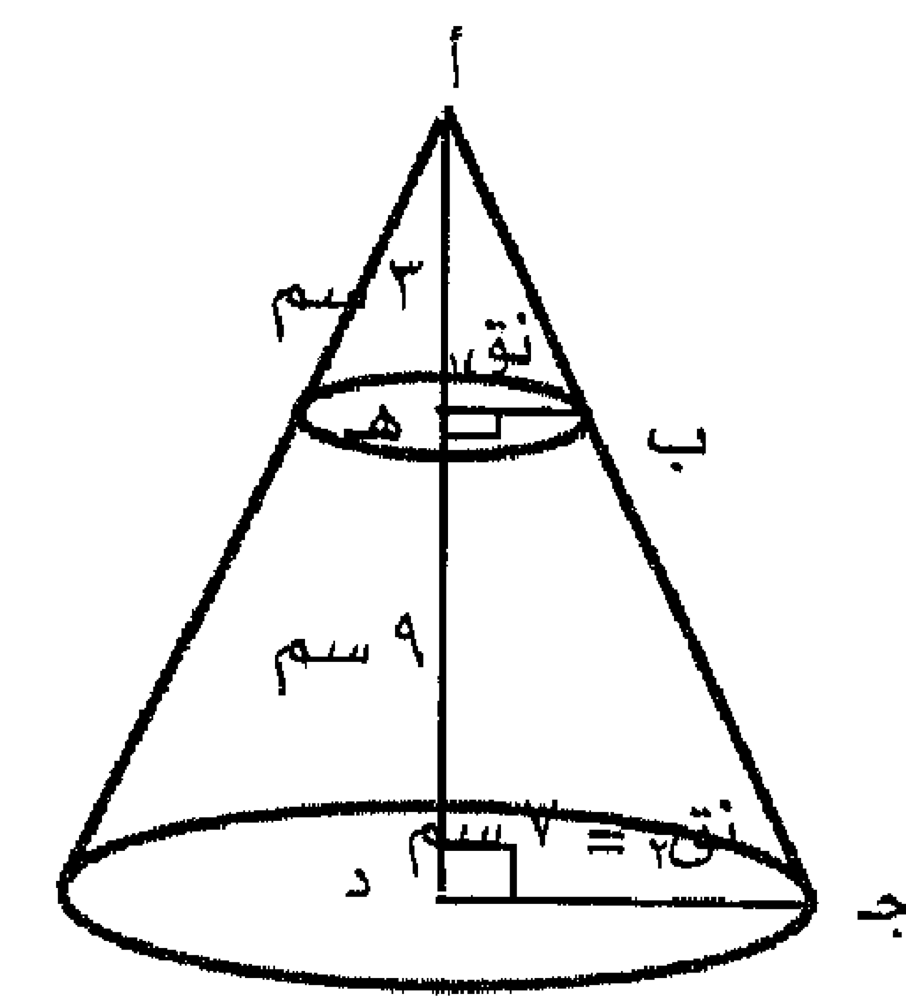
الجواب: أ د ل ز، أ ب جـ د

⇦ مثال ١٥: مخروط قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٧ سم قُطع بمستوى يوازي قاعدته ويبعد عنها ٩ سم أوجد حجم المخروط القائم الناقص الناتج المميز $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

الحل: بما أن حجم المخروط الناقص =



$\frac{٢٢}{٧} \pi$ ع (نق$_١$ ^{٢} + نق$_١$ نق$_٢$ + نق$_٢$ ^{٢})



فإننا سنجد طول نق كما في الشكل.

المثلثان أ ب هـ، أ جـ د متشابهان

(تساوي زواياهما المتناظرة)

$\therefore$ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ د}}$

أي أن $\frac{٣}{١٢} = \frac{\text{ب هـ}}{٧}$ وبالضرب التبادلي

ب هـ = $\frac{٣ \times ٧}{١٢} = \frac{٧}{٤}$ سم طول نق$_١$

$\therefore$ حجم المخروط الناقص = $(\frac{١}{٣})(\frac{٢٢}{٧})(٩)\{(\frac{٧}{٤})^٢ + (\frac{٧}{٤} \times ٧)$ + $(٧)^٢\}$

$= (\frac{٦٦}{٧})(\frac{٤٩}{٤} + \frac{٤٩}{٤} + \frac{٤٩}{١})$

$= \frac{٦٦}{٧} (\frac{٤٩}{١٦} + \frac{٤٩}{٤} + \frac{٤٩}{١})$

$= \frac{٦٦}{٧} (\frac{٤٩}{١٦} + \frac{١٩٦}{١٦} + \frac{٧٨٤}{١٦})$

$= \frac{٦٦}{٧} \times \frac{١٠٢٩}{١٦}$

⇦ مثال ١٦: كرة حجمها ح سم^٣ ومساحة ك سم^٢ أوجد طول نصف قطرها عندما ح = ك.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ π سم^٣

مساحة سطح الكرة = ٤ نق^٢ π سم^٢

وبما أن ح = ك

$\therefore$ $\frac{\frac{١}{٣} \text{نق}^٣ \pi}{\text{نق}^٢ \pi} = \frac{٤ \text{نق}^٢ \pi}{\text{نق}^٢ \pi}$ أصبحت معادلة

$\frac{٤}{٣}$ نق = $\frac{٤}{١}$ وبالضرب التبادلي

$\frac{٤}{٤}$ نق = $\frac{٣ \times ٤}{٤}$

∴ نق = ٣ سم نصف قطر الكرة.

⇦ مثال ١٧: بئر ماء على شكل موشور خماسي مساحة قاعدته ٣م^{٢} وارتفاعه ٣,٦م احسب كم لتراً من الماء يتسع عندما يكون مملوءاً.

الحل: سعة البئر هي حجمه من الداخل

حجم الموشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ سعة البئر = ٣ × ٣,٦ = ١٠,٨ م^{٣}

من المعلوم أن م^{٣} = ١٠٠ × ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠٠٠ سم^{٣}

وأن اللتر = ١٠٠٠ سم^{٣}

∴ م^{٣} = $\frac{١٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠}$ = ١٠٠٠ لتر

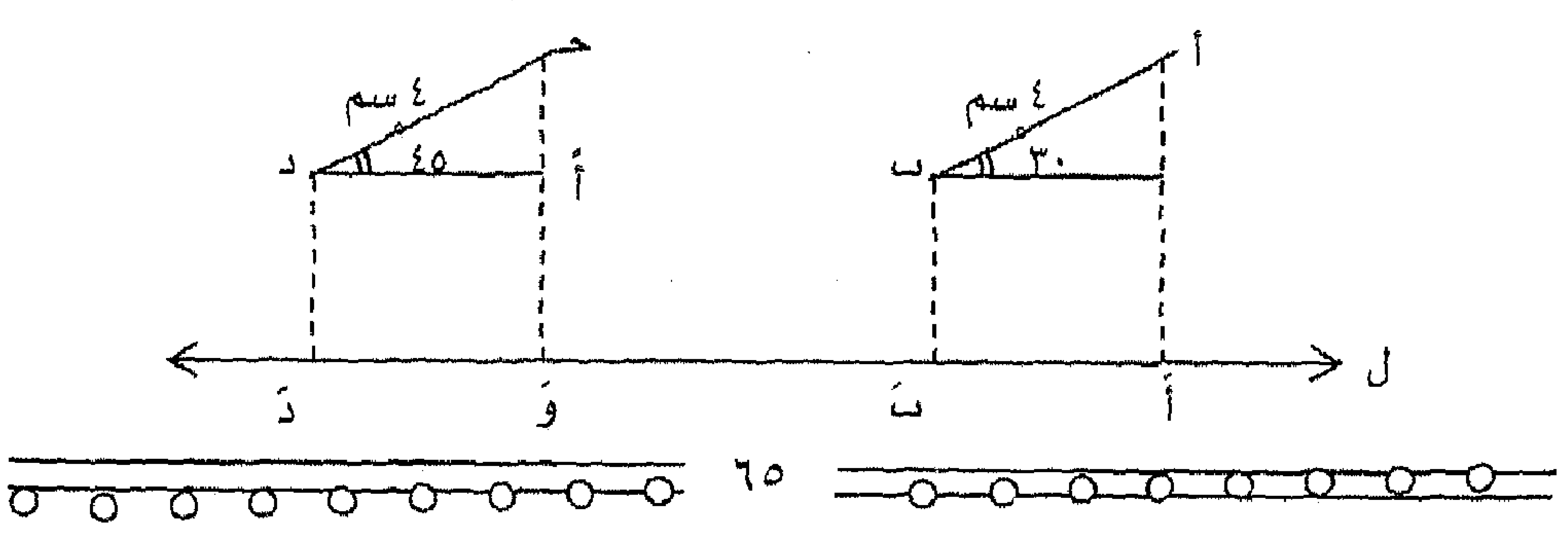
∴ سعة البئر = ١٠,٨ × ١٠٠٠ = ١٠٨٠٠ لتر.

⇦ مثال ١٨: أجب بنعم أو لا ولكن مع التوضيح التام:

إذا تساوت قطعتان مستقيمتان في الطول، هل يتساوى طولا مسقطيهما؟

الجواب باختصار لا.

وأما البيان فهو بالتفصيل ومع التوضيح كما يلي:



مع أن أ ب = جـ د = ١٠ سم وعلى سبيل المثال

فإن أَبَ ≠ جـَ دَ للاختلاف بين قياسي القطعة المستقيمة ومسقطها في الحالتين كما في الشكل

كون أَ بَ = أ ب جتا ٣٠° = ١٠ جتا ٣٠° = ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ = ٥ (١,٧)

= ٨,٥ سم تقريباً

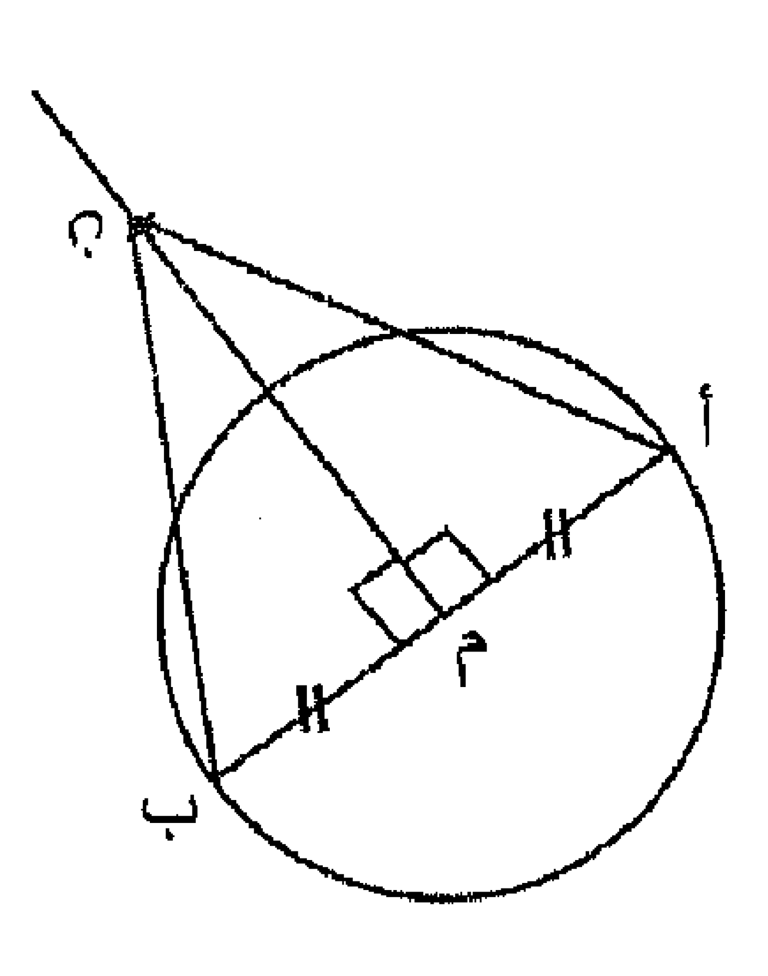
وكذلك جـَ دَ = جـ جتا ٤٥° = ١٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

= $\frac{١٠\sqrt{٢}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ = ٥ (١,٤) = ٧ سم

أي أن ولو كان أ ب = جـ د فإن أَ بَ ≠ جـَ دَ والسبب هو قياس الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها في كل حالة.

⇦ مثال ١٩: دائرة مركزها م، أقيم من مركزها عموداً على مستواها وفرضت عليه أي نقطة مثل ن ، إذا كانت أ، ب نقطتين على الدائرة (محيطها).

بين أن ن أ = ن ب



الحل: بما أن م ن ⊥ مستوى الدائرة

∴ م ن ⊥ على أي مستقيم في الدائرة

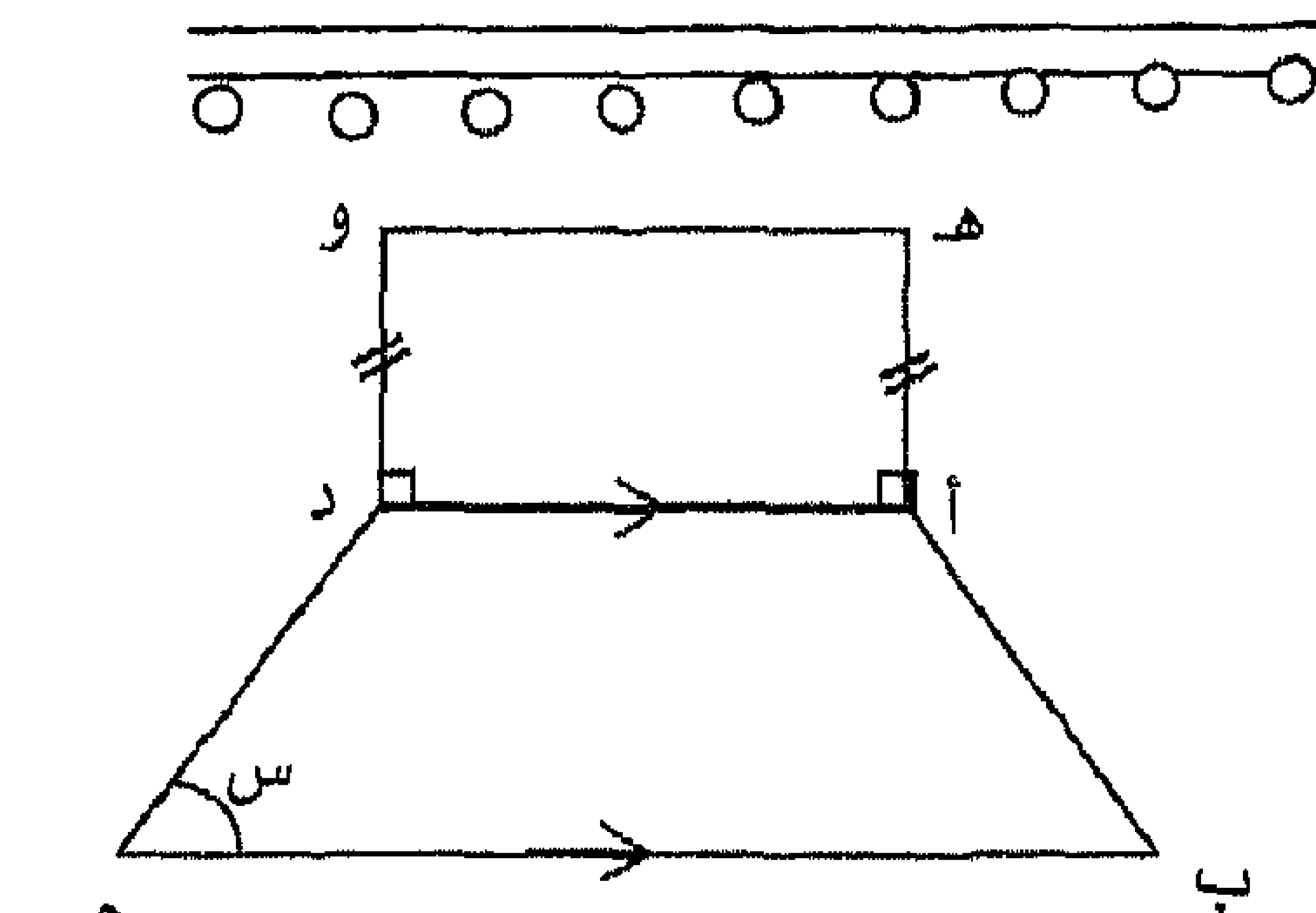
∴ م ن ⊥ أ ب

∴ ∢ أ م ن = ∢ أ م ن = قائمة

وبما أن أ م = م ب أنصاف أقطار الدائرة

∴ أ ن ب مثلث متساوي الساقين كون م ن عمود والنصف القاعدة أ ب

∴ أ ن = ن ب وهذا المطلوب بيانه



⇦ مثال ٢٠: أ ب جـ د شبه منحرف $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، رسم العمودان هـ أ، د و على مستوى شبه المنحرف س بحيث أن هـ أ = د و

بين أن هـ و // المستوى س.

الحل:

هـ أ ، و د عمودان على نفس المستوى س لذا فإن هـ أ// و د

وبما أن هـ أ= د و بالمُعطيات

∴ هـ أ د و متوازي أضلاع

وبما أن زواياه قوائم

∴ هـ أ د و مستطيل

∴ هـ و // و د

ولما كان أ د مستقيم واقع في المستوى س

∴ هـ و // المستوى س

(١٤ — ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) ما حجم أسطوانة قطر قاعدتها ٦٠ سم وارتفاعها ٨٠ سم

اعتبر π = ٣,١٤

{٢٢٦ سم^{٣} تقريباً}

(٢) أي من المسميات (نقطة، مستقيم، شعاع، قطعة مستقيمة، مستوى) يمكن أن تعبر عن كل ما يلي:

١. ذرة من الرمل

٢. سقف الغرفة

٣. موقع سفينة في البحر

٤. ملعب كرة القدم

٥. ضلع الزاوية الابتدائي

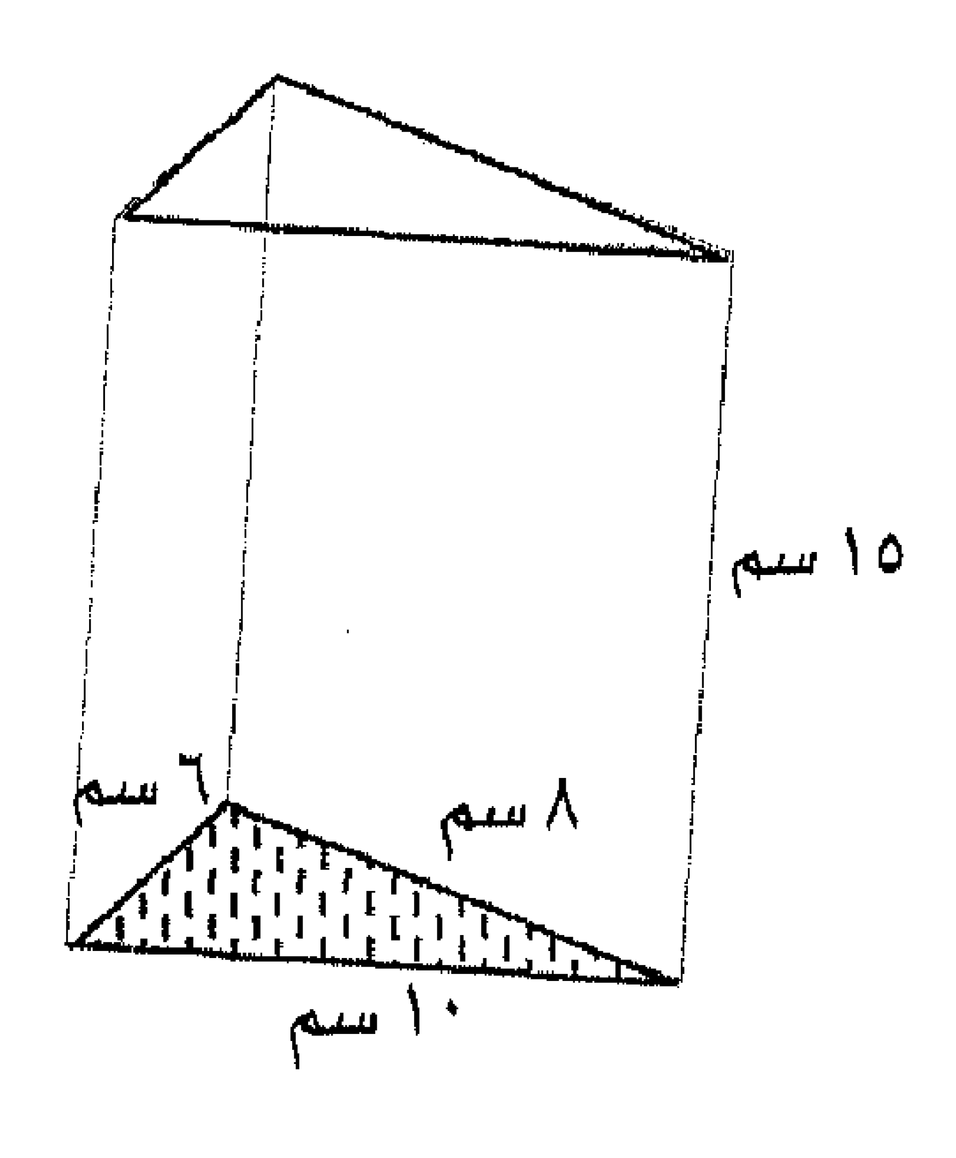
٦. ضلع المربع

(٣) موشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية وارتفاعه ١٥ سم كما في الشكل احسب

١. مساحته الجانبية

٢. مساحته الكلية

٣. حجمه

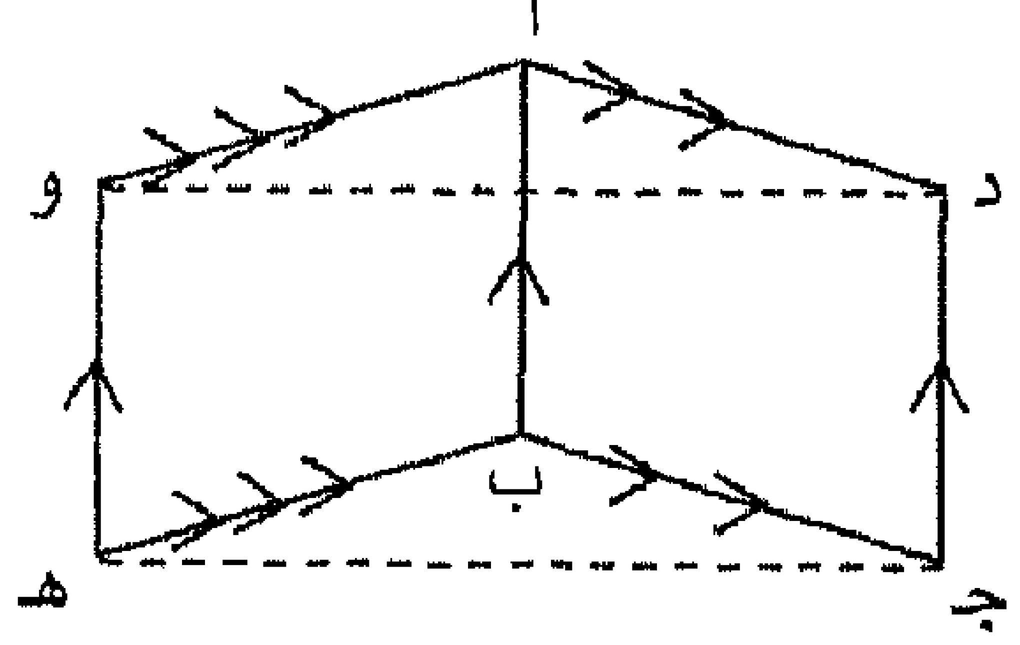


{٣٦٠سم^{٢}، ٤٠٨سم^{٢}، ٣٦٠سم^{٣}}

(٤) أيهما أكبر حجماً؟ الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٧ سم أم الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٤ سم.

{الاسطوانة أ}

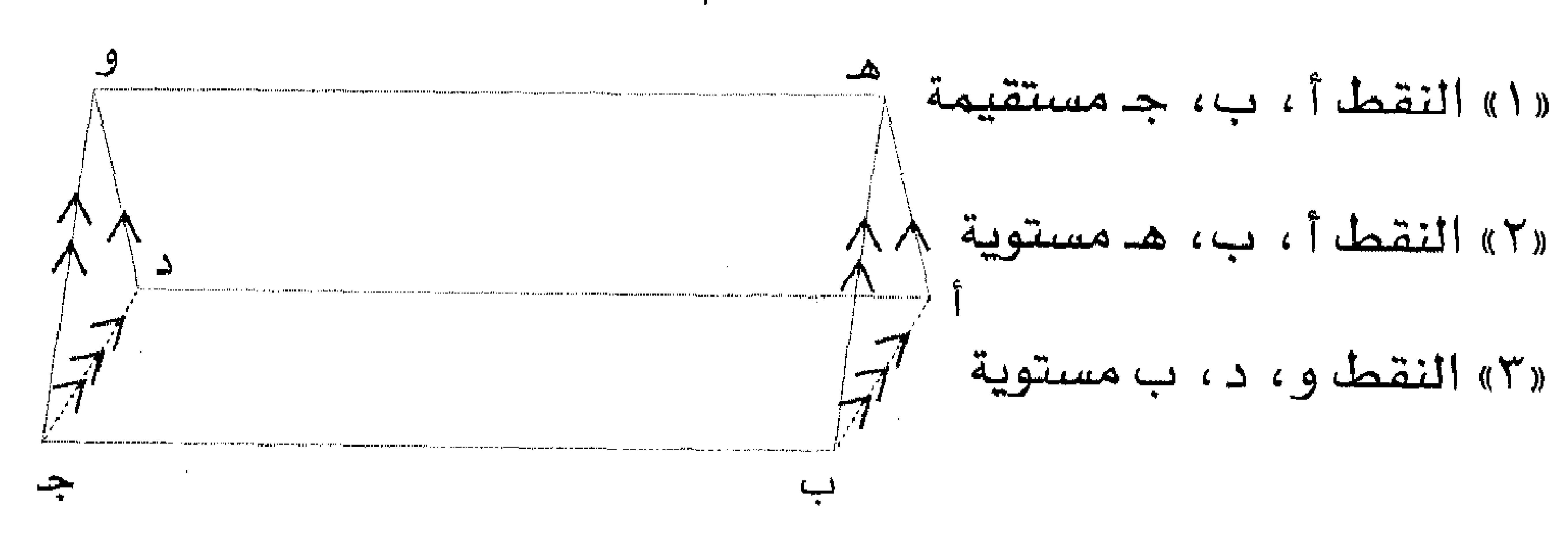
(٥) أ ب جـ د ، أ ب هـ و متوازيا أضلاع يقعان في مستويين مختلفين كما في الشكل.



بين أن جـ د و هـ متوازي أضلاع

إرشاد {دجـ = و هـ ويوازيه}

(٦) اعتماداً على الشكل المجاور، أجب بنعم أو لا :



«١» النقط أ ، ب، جـ مستقيمة

«٢» النقط أ ، ب، هـ مستوية

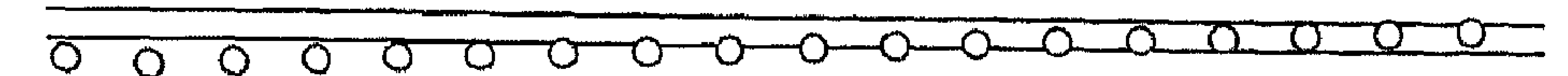
«٣» النقط و، د ، ب مستوية

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، أقيم من جـ عمود على مستوى المثلث وعُينت عليه النقطة د بحيث كان أب = جـ د = ٢ ب جـ.

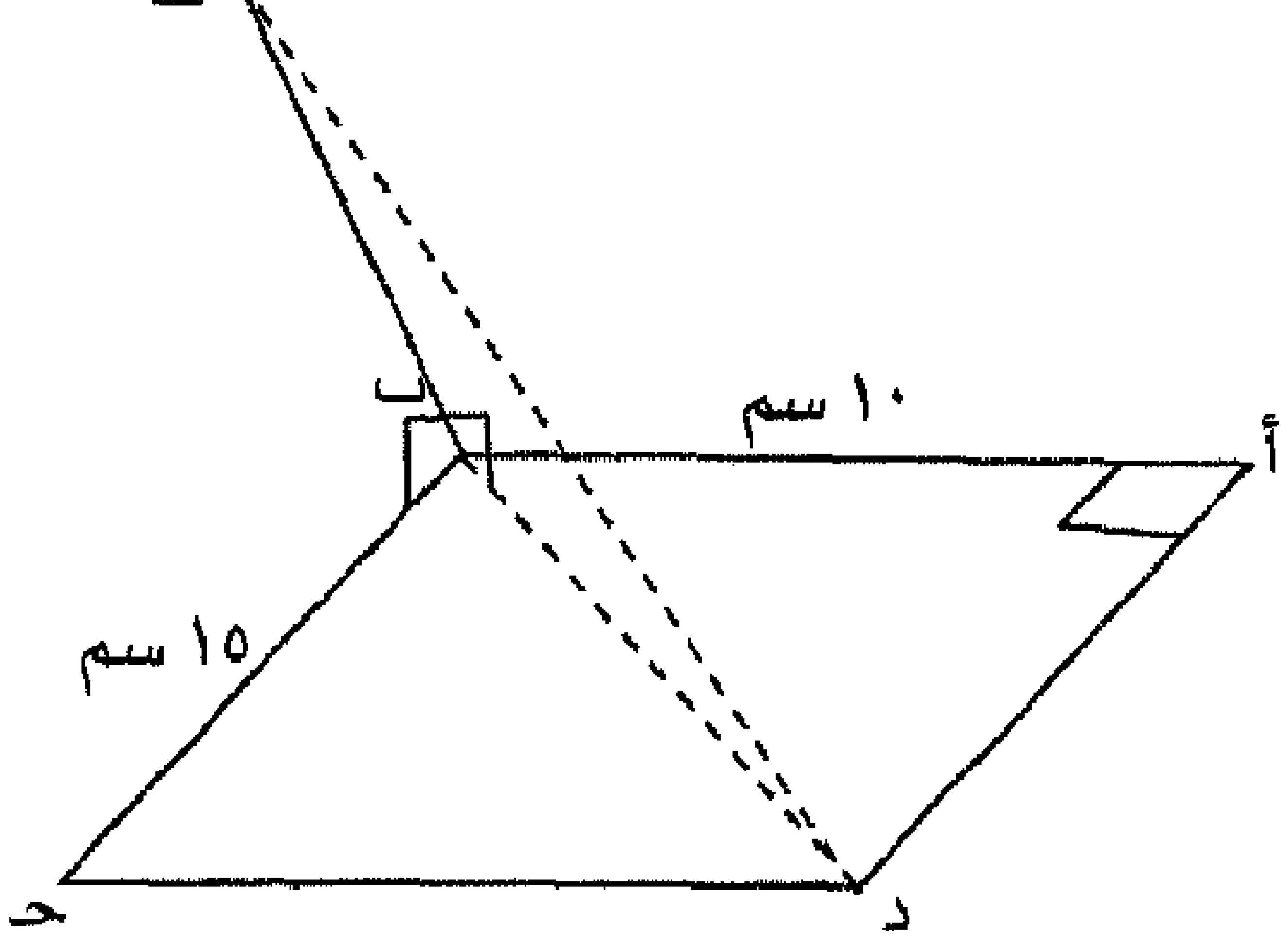
بين أن أد = ٣ ب جـ

إرشاد : استعن بنظرية فيتاغورس

(٨) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٠ سم، ب جـ = ١٥ سم أُقيم من ب عمود على



مستوى المستطيل وعينت عليه النقطة هـ بحيث كان ب هـ = ٢٠ سم كما في الشكل ما طول هـ د ؟



{ ٥ $\sqrt{٢٩}$ سم = ٢٧ سم تقريباً}

(٩) كتلة خشبية على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ٢٤ سم، ١٦ سم، ١٠ سم احسب عدد المكعبات الخشبية التي يمكن صنعها من تقطيع هذه الكتلة إذا كان طول حرف القطعة المكعبة الواحدة ٢ سم.

{٤٨٠}

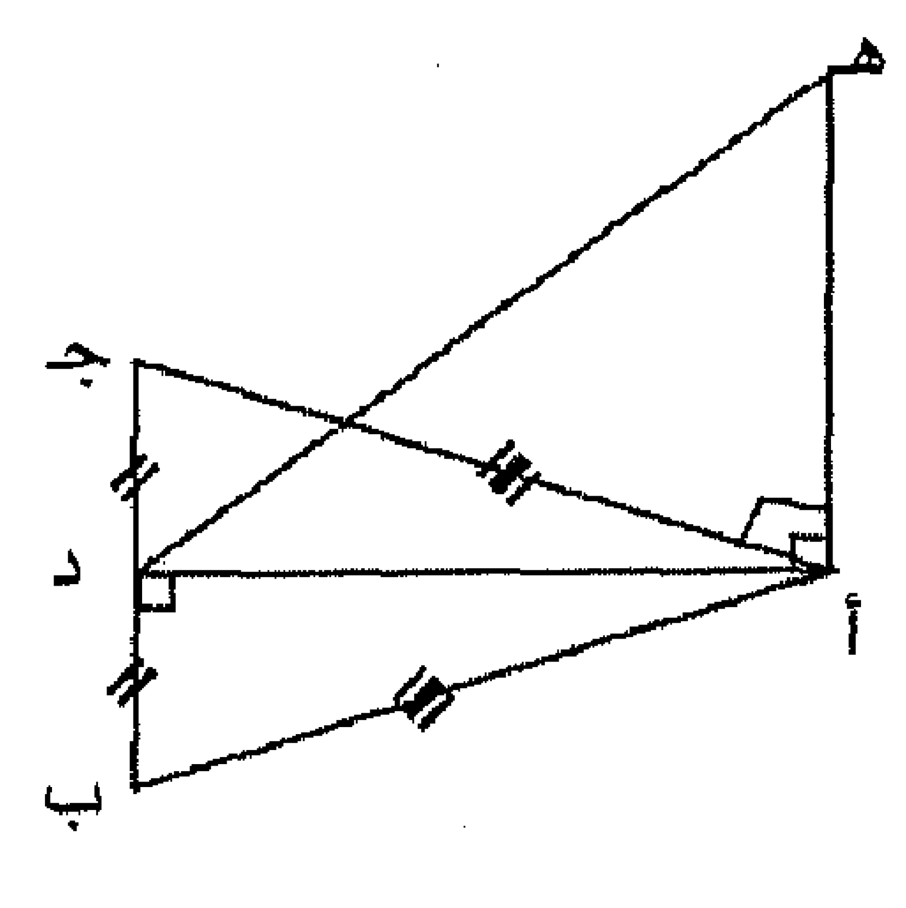
(١٠) مكعب من حديد حجمه ٦٤ سم^{٣} ما مساحته الكلية

{٩٦ سم^{٢}}

(١١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ

رسمت $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

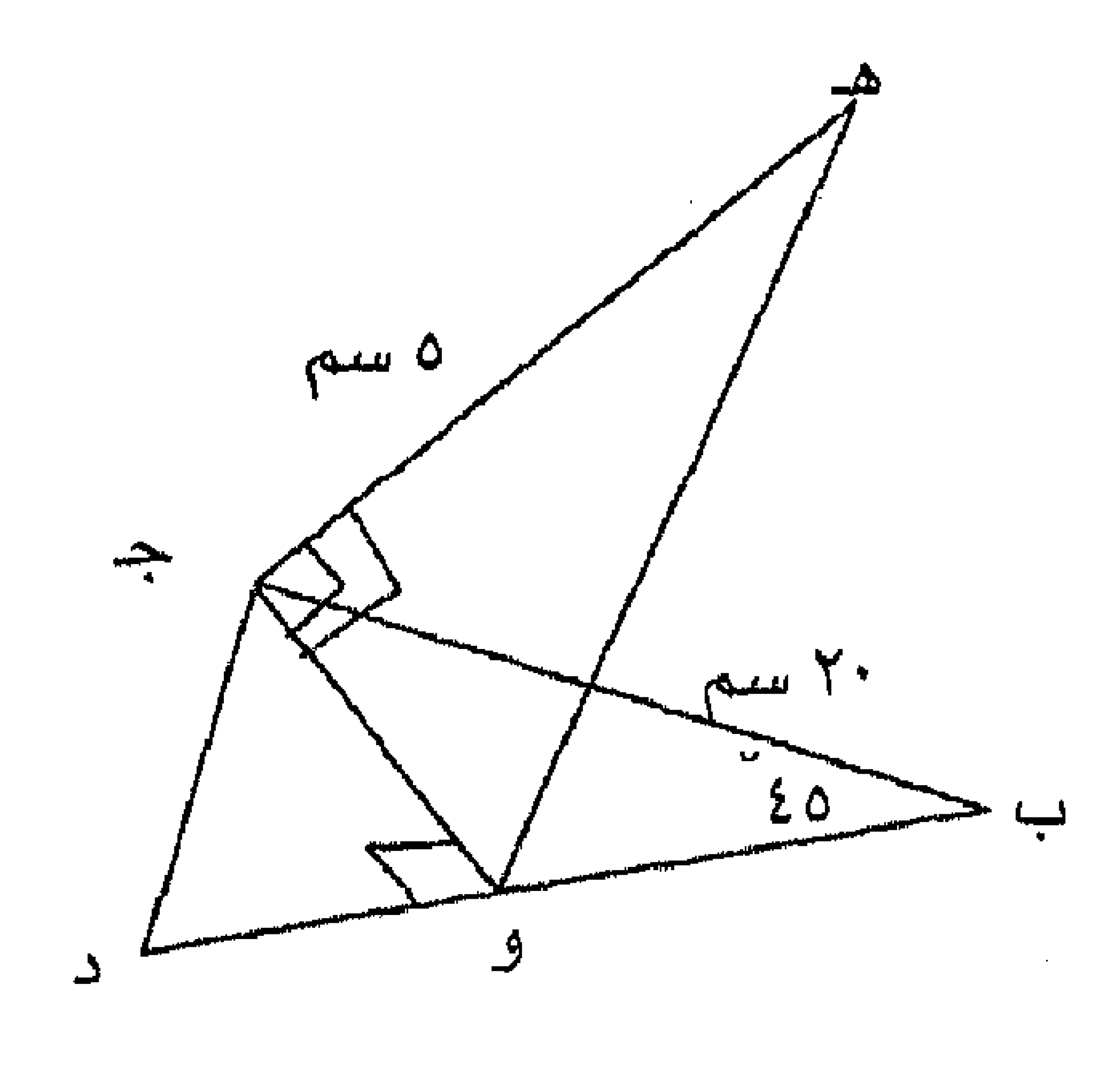
فإذا كانت د منتصف ب جـ



بين أن هـ د ⊥ ب جـ

استعن بالشكل المجاور.

إرشاد أ د ارتفاع ومستقيم متوسط



(١٢) إذا كان الشكل يمثل المثلث ب جـ د الذي فيه ∢ ب = ٤٥°، ب جـ = ٢ سم رسمت جـ هـ عمودية على المستوى ب جـ د ثم رسمت هـ و ⊥ ب د فقطعته في النقطة و وكان جـ هـ = ٥ ، فما طول القطعة هـ و

{١٥}

(١٣) وجدت نملة نفسها فجأة في قرنة سقف قاعة بشكل متوازي مستطيلات طولها ٢٠ متر وعرضها ١٢٣ متر وارتفاعها ٩ م.

احسب طول أقصر مسافة تقطعها النملة لتصل إلى القرنة المقابلة على الأرض

استعن بالشكل.

حيث أ نقطة البداية

ب نقطة النهاية

{٣٥ متر}

(١٤) ما حجم كل من المكعبات التالية بالأمتار المكعبة؟

«١» مكعب طول حرفه ٧٥ سم

«٢» مكعب طول حرفه ١٦ د سم

«٣» مكعب طول حرفه ٥ م

{٠.٤٢١، ٤,٠٩٦، ١٢٥}

(١٥) مكعب حجمه ٢١٦ سم^{٣} احسب

«١» مساحته الجانبية «٢» مساحته الكلية

{١٤٤، ٢١٦}

(١٦) ما طول ضلع مكعب حجمه يساوي مساحته الجانبية ؟

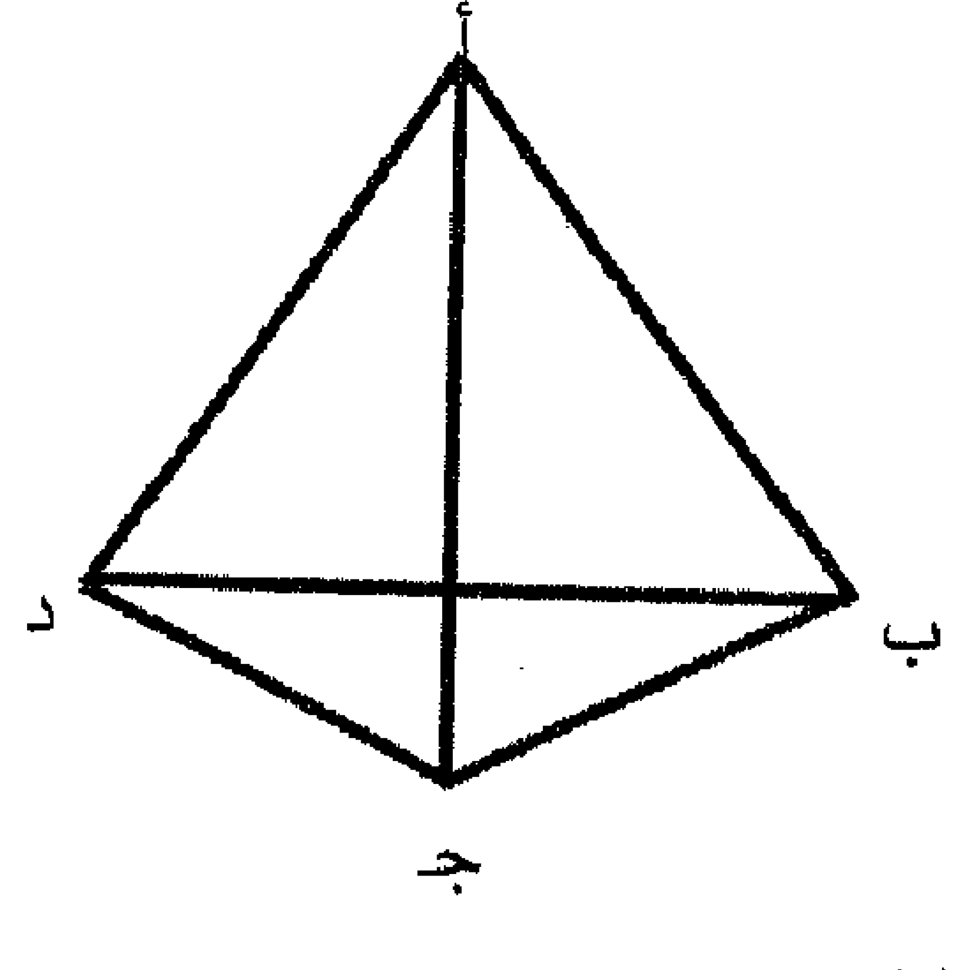
{٤}

(١٧) اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

«١» سمِ ثلاث نقط.

«٢» سمِ ثلاثة مستقيمات.

«٣» سمِ ثلاثة مستويات.



{{أ، ب، جـ}، { $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دأ}}$ }، {أ ب جـ، أ د جـ، أ ب د}}

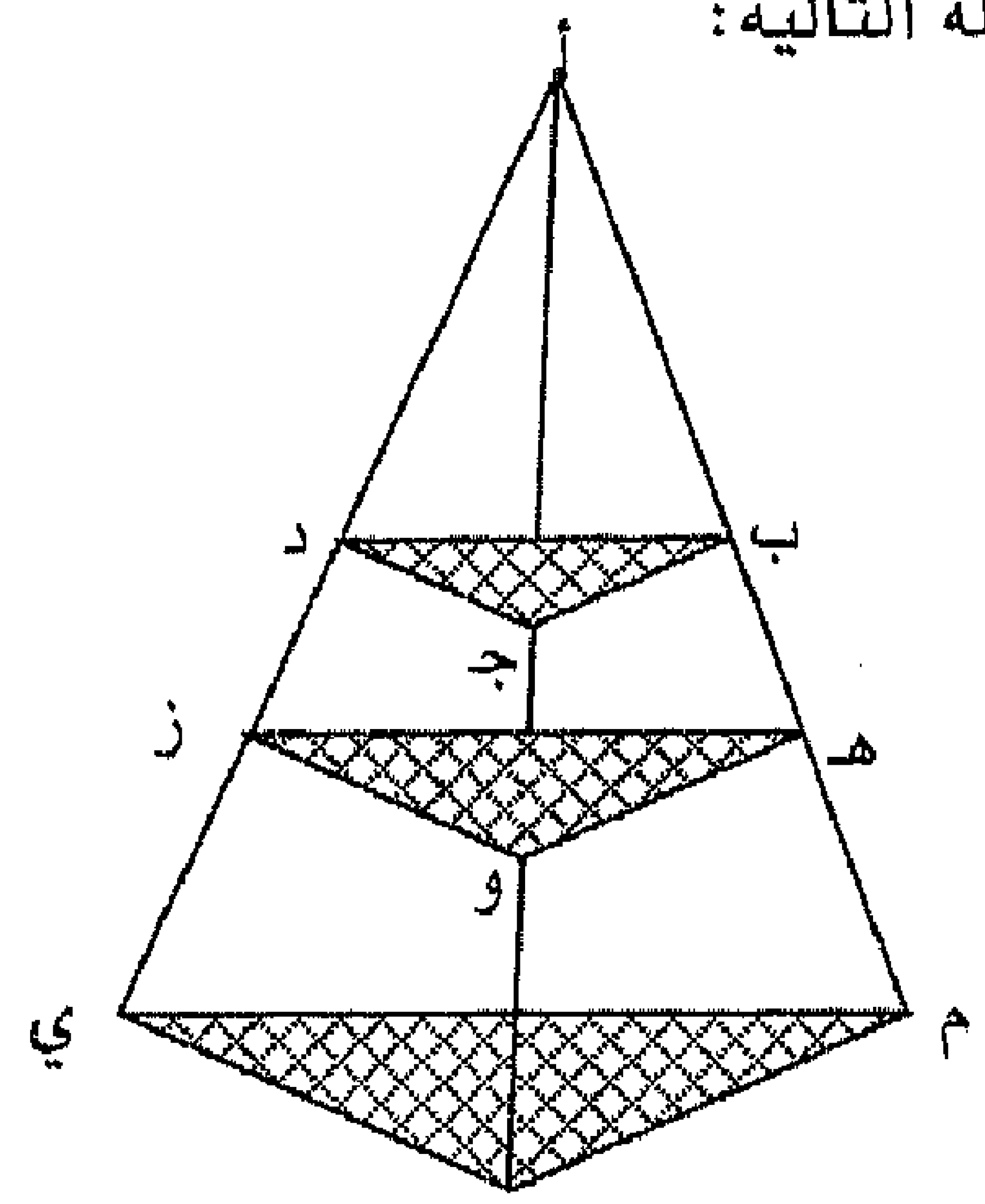
(١٨) اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:



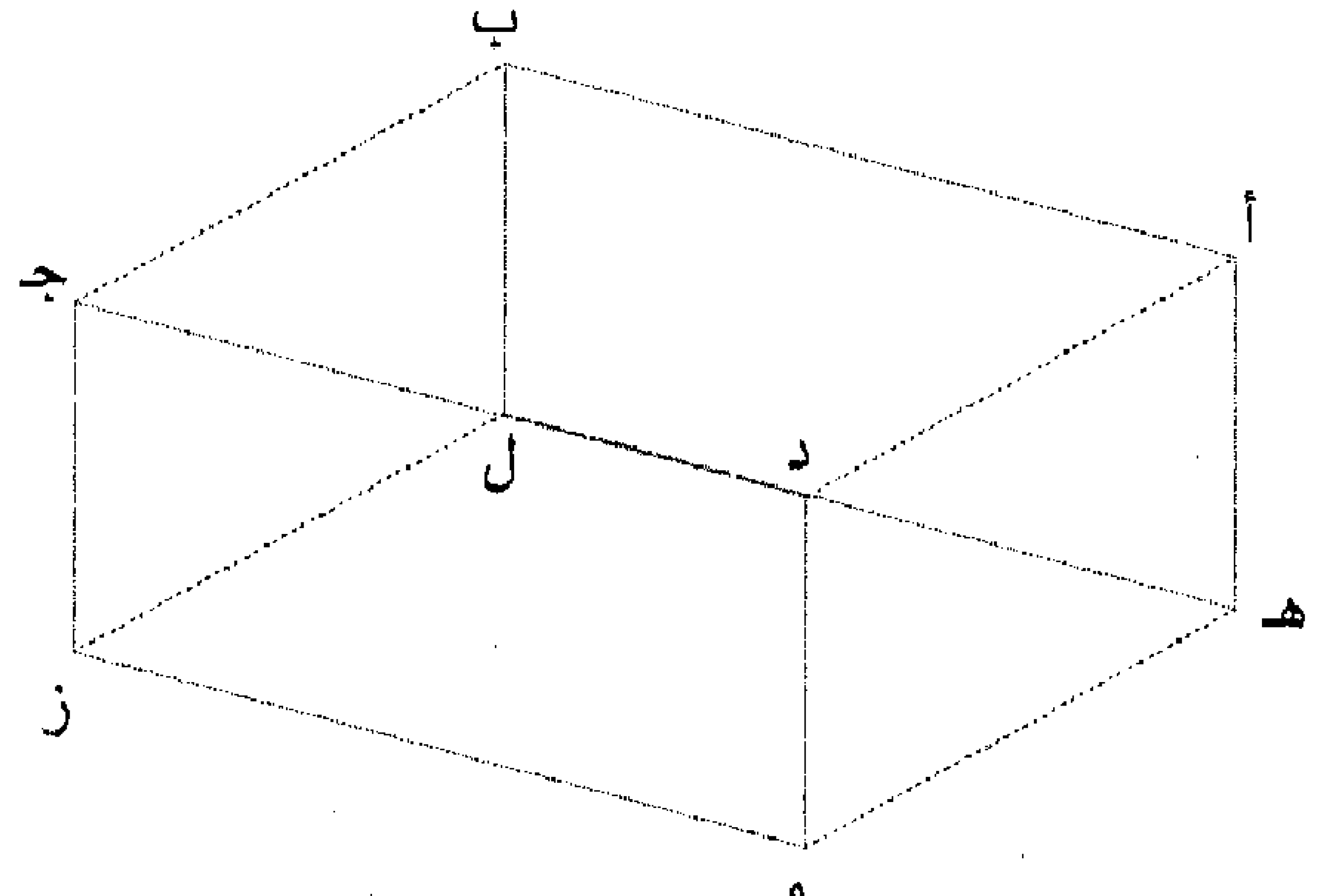
«١» سمِ خمسة مستويات مختلفة

«٢» سمِ مستويين يحويان المستقيم ح ي

«٣» سمِ مستويين يحويان المستقيم ح ط



(١٩) اعتمد على الشكل المجاور والذي يمثل متوازي المستطيلات للإجابة عن الأسئلة الآتية:



«١» سمِ ثلاثة مستقيمات توازي المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$

«٢» سمِ ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.

«٣» سمِ ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

(٢٠) سلك من النحاس الأصفر Cu طوله ٢٥ سم، عُينت عليه النقط أ، ب، جـ، د على الترتيب بحيث احتلت النقطتان أ، د طرفي السلك وكان أ ب = د جـ = ١٠سم، ثُنّيت أجزاء السلك من النقطتين ب، جـ



بحيث كان أ ب ⊥ ب جـ، جـ د ⊥ المستوى أ ب جـ كما في الشكل.

احسب طول أ د.

{١٥ سم}

(٢١) قال حسّان لصديقه نعمان: رأيت في المنام بيتاً ضخماً على شكل هرم سداسي منتظم القاعدة طول ضلع قاعدته ٤ متر وارتفاعه ١٢ متراً.

احسب لي حجمه.

إرشاد: اقسم القاعدة إلى مثلثات واستخدم القانون مساحة المثلث =

$\sqrt{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - جـ)}$

{٢٤٦ م^{٣} تقريباً}

(٢٢) ارسم شكلاً يمثل كل حالة من الحالات التالية:

«١» المستقيمان $ل_{١}$، $ل_{٢}$ يتقطعان في النقطة أ.

«٢» النقط أ، ب، جـ، هـ مستوية.

«٣» المستويان س، ص يتقاطعان في المستقيم جـ د.

«٤» المستقيم جـ د لا يقطع المستوى س.

«٥» المستقيم ل يقطع المستوى س في النقطة هـ.

(٢٣) كم مستوى تمثل جدران غرفة الصف (بشكل متوازي مستطيلات). {٤}

وكم مستقيماً ينتج من تقاطع هذه المستويات مثنى؟ {٤}

(٢٤) إذا كانت النقط أ، ب، جـ غير مستقيمة وواقعة في المستوى س، كم مستقيماً يمكن رسمه بحيث يحتوي كل منها نقطتين من هذه النقط ؟

{٣}

(٢٥) أ، ب، جـ، د، هـ خمس نقط مستوية، ليس منها أي ثلاث مستقيمة، كم مستقيماً يمر بها إذا أخذت مثنى مثنى.

{١٠}

(٢٦) ما عدد المستويات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل منها:

«١» بثلاث نقط غير مستقيمة.

«٢» بثلاث نقط مستقيمة.

«٣» بأربع نقط، ثلاث منها مستقيمة.

(٢٧) ما نص المسلمة التي تفسر كلاً من هاتين العبارتين!

«١» إذا كانت أ، ب نقطتين على المستقيم ل

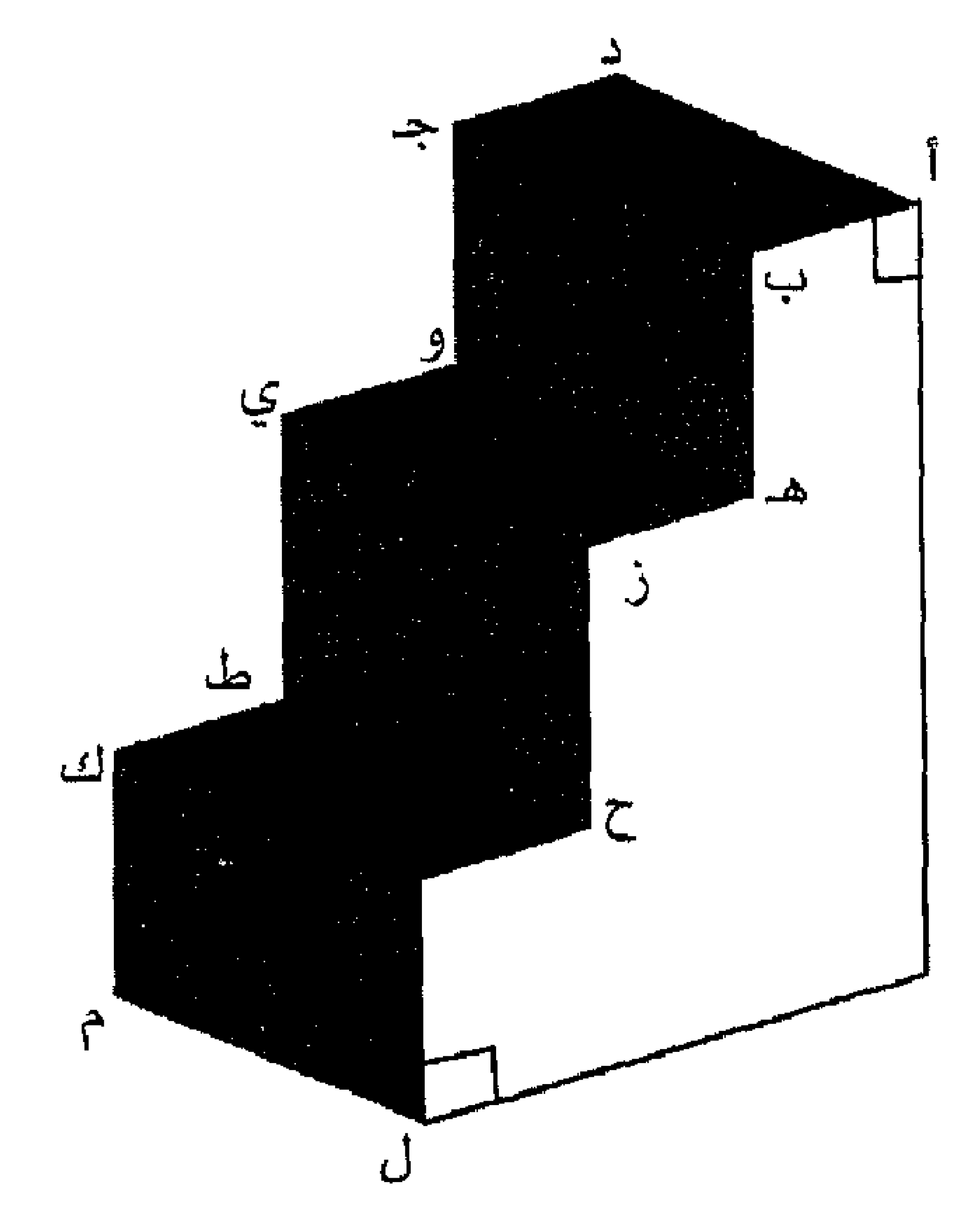
و كانت أ، ب نقطتين على المستقيم م

فإن ل، م هما المستقيم نفسه.

«٢» إذا كانت أ، ب نقطتين في المستوى س فإنه لا يوجد أي نقطة على المستقيم أ ب لا تقع في المستوى س.

(٢٨) ما أقل عدد من النقط والتي تحدد المستوى الواحد ؟ وضح بالرسم.

(٢٩) الشكل المجاور يمثل مقطعاً عرضياً لدرج والسؤال: أعطِ مثالاً واحداً على كل حالة من الحالات التالية:





«١» مستويان متعامدان.

«٢» مستويان متوازيان.

«٣» مستقيمان متخالفان.

«٤» مستقيم يقطع المستقيم ق ك

«٥» مستقيمان متوازيان.

«٦» مستويان متقاطعان.

(٣٠) الشكل المجاور يمثل موشوراً ثلاثياً قائماً قاعدته مثلث متساوي الأضلاع اعتماداً عليه أجب عما يلي:

«١» ما قياس كل زاوية زوجية في الشكل {60°}

«٢» سمِ المستويات المتعامدة.

«٣» ماقياس الزاوية بين المستقيمين أ ب، هـ و {60°}

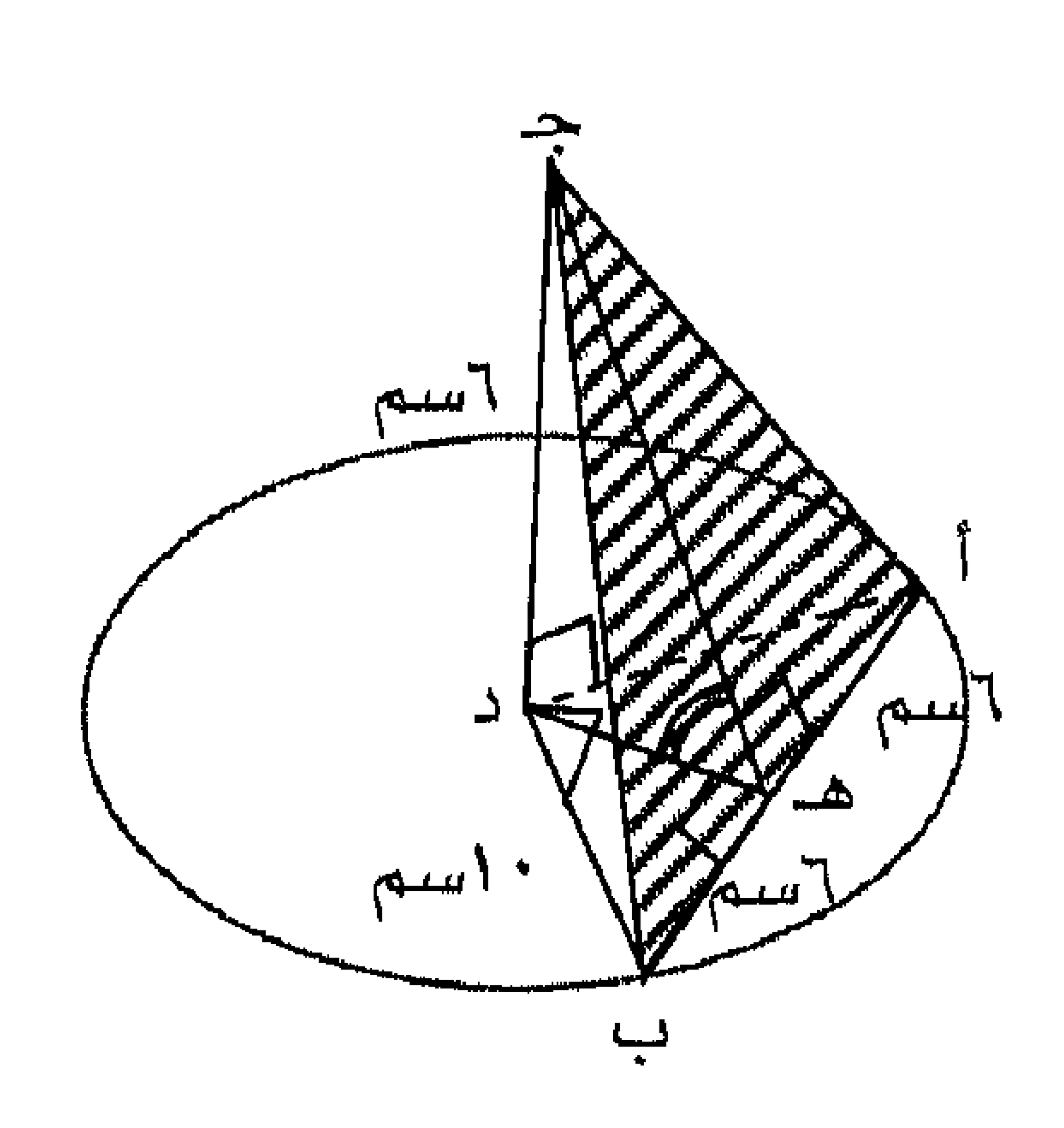
(٣١) الشكل المجاور يمثل دائرة مركزها د ونصف قطرها ١٠ سم، أ ب وتر فيها طوله ١٢ سم، د جـ ⊥ مستوى الدائرة

حيث د جـ = ٦ سم

احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ومستوى الدائرة

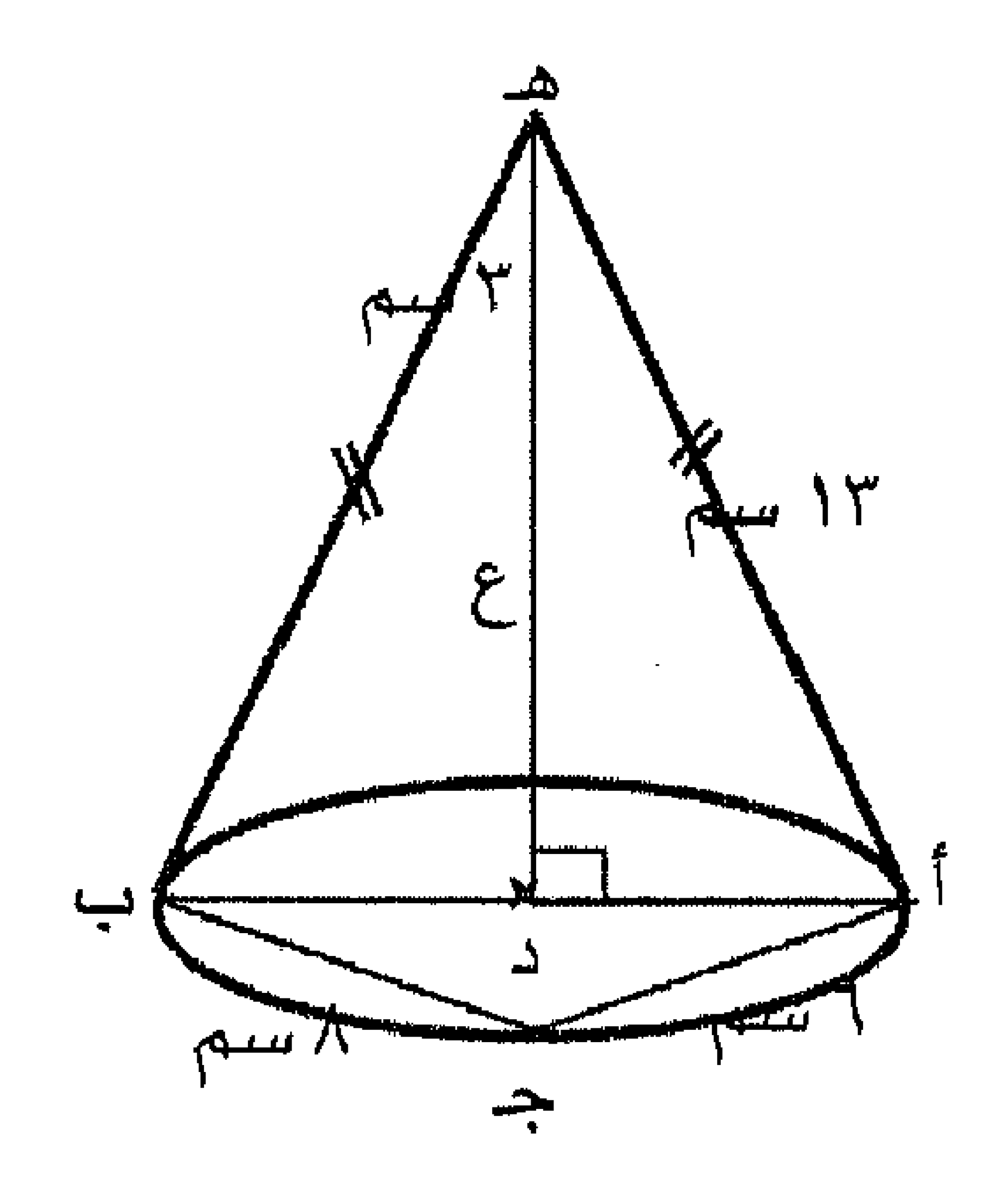
{إرشاد: إنها الزاوية جـ هـ د والتي تمثل جـ ـ أ ب ـ د }

{٤٥°}



(٣٢) مخروط قائم طول راسم أ هـ = ١٣ سم عُين على محيط قاعدته النقط أ، ب، جـ بحيث كان أ جـ = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم، أ ب قطراً لقاعدته كما في الشكل، احسب طول ارتفاعه هـ د.

{١٢}



(٣٣) ما حجم الكرة الأرضية إذا اعتبرنا أن طول نصف قطرها ٤٠٠٠ ميل (كما يقول الجغرافيون) وباعتبار π = ٣,١٤.

(٣٤) مكعب من الرصاص طول حرفه ٩ سم، صُهر هذا المكعب بالحرارة وحوِّل

إلى اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ٤ سم وارتفاعها ١٤ سم، ما حجم الرصاص الذي فُقد أثناء عملية الصهر والتحويل علماً بأن π = $\frac{٢٢}{٧}$.

(٣٥) خزّان ماء أرضي طوله $\frac{١}{٧}$ ٧ متر وعرضه $\frac{١}{٥}$ ٥ متر وعُمقه $\frac{١}{٤}$ ٤ متر، ما حجم الماء بالمتر المكعب اللازم لملئه بالتمام.

(٣٦) إذا كان حجم موشور رباعي قائم ٤٨ د سم^{٣} ما حجم الهرم المشترك معه بالقاعدة والارتفاع.

{١٦ د سم^{٣} }

(٣٧) صنع سُفيان صندوقاً من الخشب على شكل موشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١ متر وارتفاعه $\frac{١}{٢}$ متر مفتوحاً من الأعلى، ما ثمن الخشب الذي صنعه منه علماً بأن تكلفة المتر المربع الواحد ٨ دنانير.

إرشاد: مساحة القاعدة والمساحة الجانبية

{٢٤ دينار}

(٣٨) ما حجم اسطوانة دائرية نصف قطر قاعدتها ٥ سم ومساحتها الجانبية ٦٠٠ سم^{٢}

{١٥٠٠ سم^{٣}}

(٣٩) قطعة من ورق الترشيح على شكل نصف دائرة قطرها ٦,٢٨ سم حوّلت على شكل مخروط دائري قائم أجوف، احسب مساحة المخروط الناتج الجانبية.

{إرشاد: ورقة الترشيح قطاع دائري زاويته المركزية ١٨٠°}

(٤٠) منزل على شكل موشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٢,٥ متر وارتفاعه ٣,١ متر يعلوه هرم رباعي قائم ارتفاعه ١,٦ متر، احسب حجم المنزل.

(٤١) ما طول نصف قطر كرة حجمها ٤٠٠٠ π

{١٠ $\sqrt[٣]{٣}$ سم}

(٤٢) ارسم شكلاً هندسياً يُجسم هرم خوفو علماً بأن قاعدته مربعة طول ضلعها ٢٣٠ متر وارتفاعه ١٤٩ متر.

(٤٣) مكعب حجمه ٧٥ سم^{٣} تم تغيير الحجم حسب معامل التغير $\frac{٢}{٥}$ كم يصبح حجمه .

{$\frac{٢٤}{٥}$ سم^{٣}}

(٤٤) حدِّد المجسم الذي فيه

«١» ستة أوجه متطابقة

«٢» قاعدتان دائريتان وسطح منحنى.

«٣» قاعدة ثلاثية وثلاثة أوجه مثلثية الشكل.

«٤» قاعدة دائرية واحدة وسطح منحنى.

«٥» سطح منحنى بلا قاعدة ولا ارتفاع.

(٤٥) كرة مساحة سطحها ٣٦ π سم^{٢} ، أوجد نصف قطرها وحجمها.

{٣ سم، ٣٦ π سم^{٣}}

(٤٦) أكمل نص المُسلمات التالية مراعياً الصحة والدقة العلمية.

«١» إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان....

«٢» لأي ثلاث نقط غير مستقيمة تحدد....

«٣» إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان....

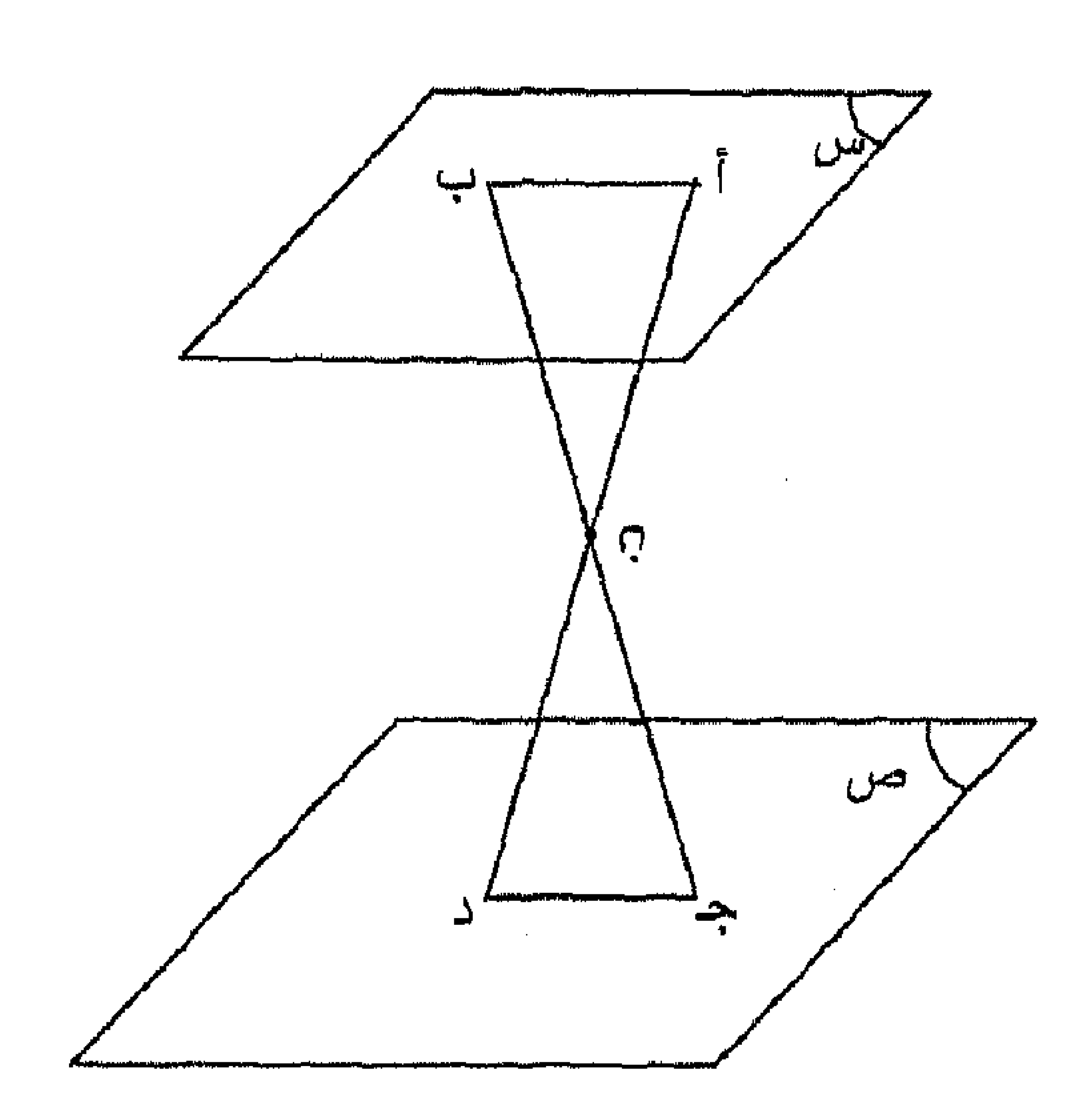
(٤٧) إذا كانت النقط أ ، ب ، هـ تقع في المستوى س.

والنقط أ ، ب ، جـ تقع في المستوى ص.

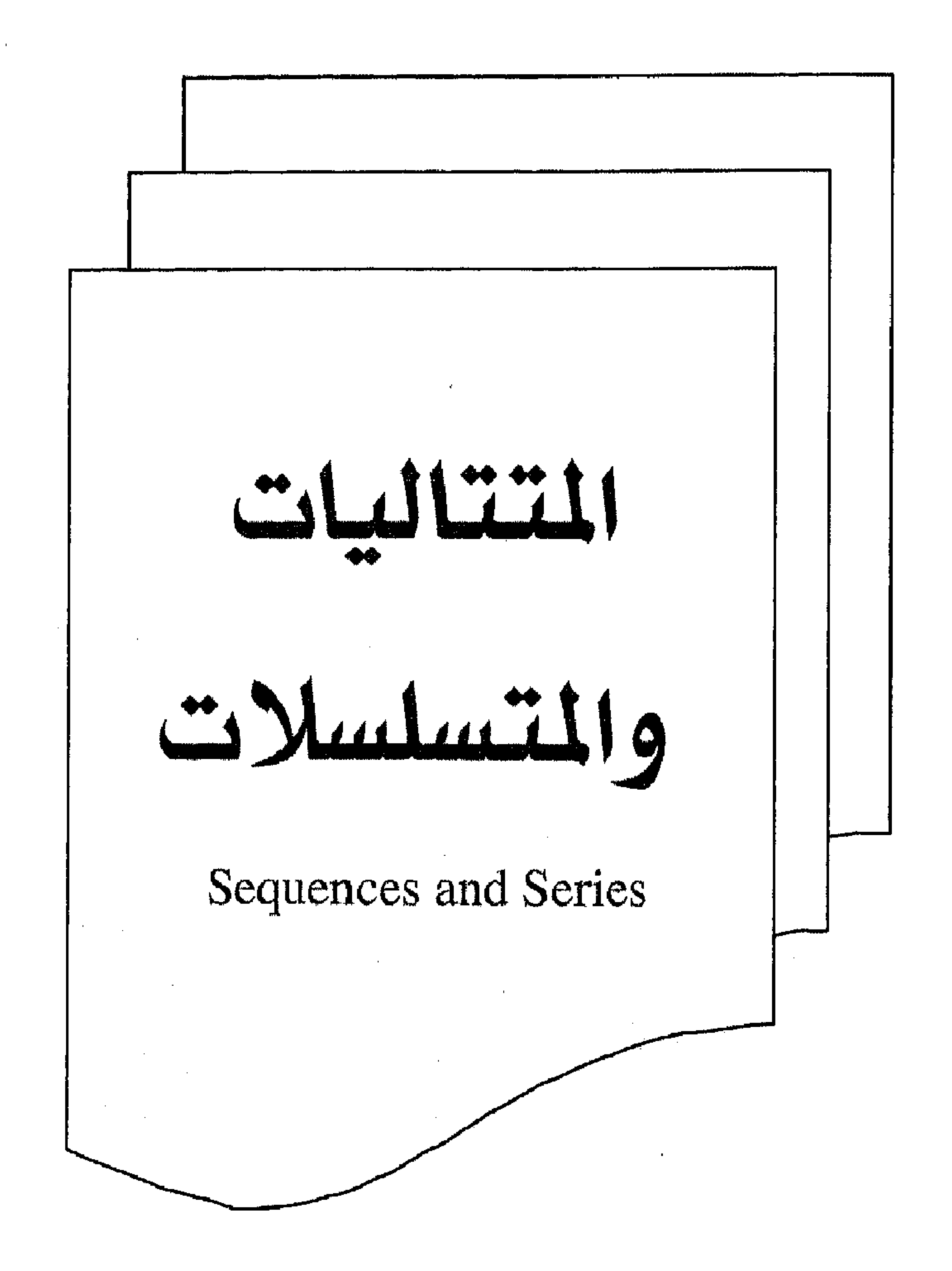
بين بالرسم أن المستويين س ، ص متقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

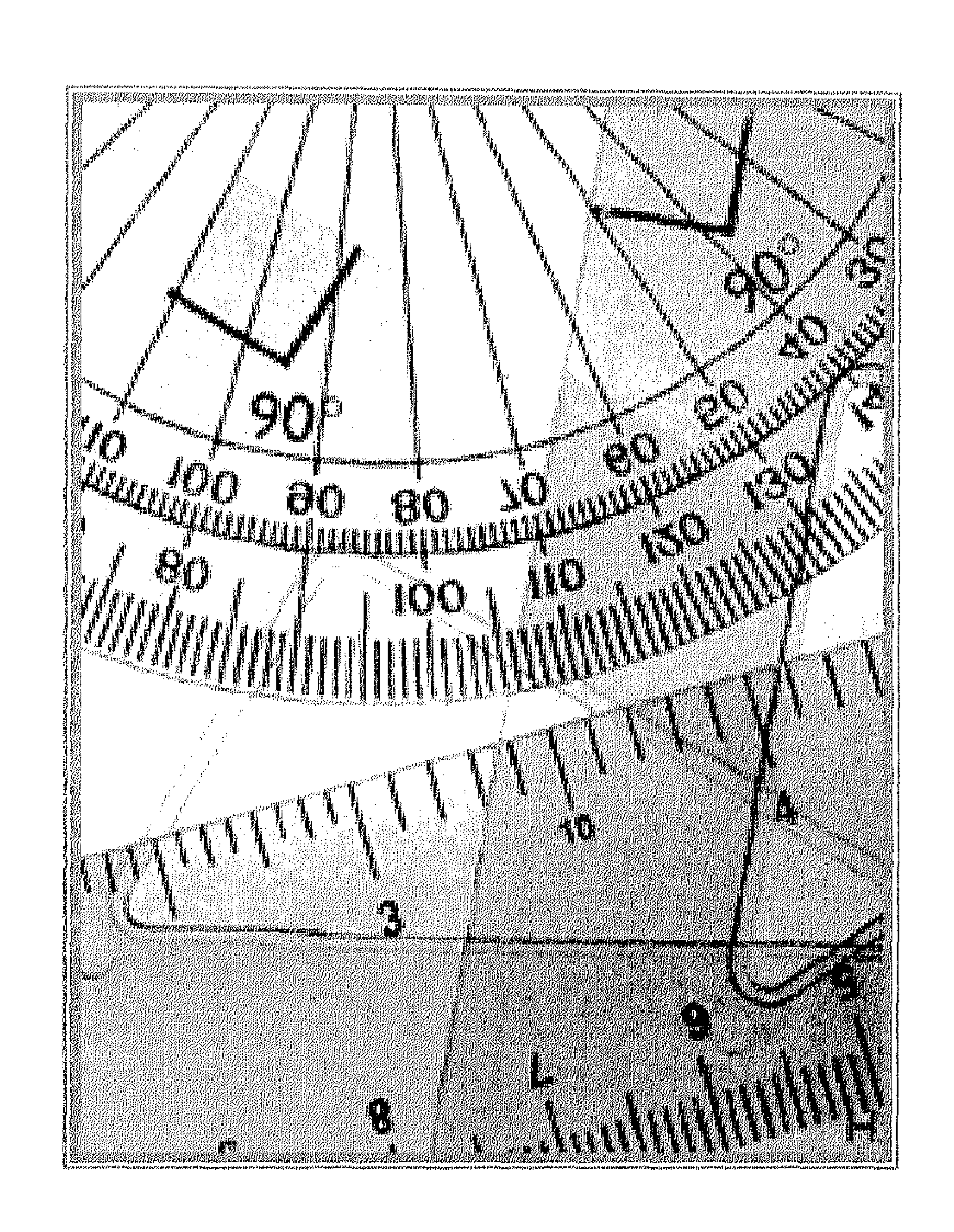
(٤٨) إذا كانت ن نقطة خارج المستويين س ، ص ، وإذا مر بالنقطة ن مستقيمان قطعا المستوى س في أ ، ب وقطعا المستوى ص في جـ ، د كما في الشكل.

بين أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$



(٤٩) موشور رباعي مساحة قاعدته ١٢ د سم^{٢} وارتفاعه ١٠ د سم احسب ، حجمه ومساحته الجانبية والكلية أيضاً.


المتتاليات
والمتسلسلات
Sequences and Series


90°
90°
110
100
80
70
60
50
40
30
130
120
110
100
80
10
3
4

(١٥ — ١) المتتالية والمتسلسلة

المتتالية: Seguence

يُصادفنا في الحياة العملية الكثير من الأعداد الحقيقية المرتبة حسب قانون أو قاعدة في معظم الأحيان، ولنفرض أن الطبيب سعدون يناوب في أحد المستشفيات ليلةً واحدة من كل خمس ليال متتالية، وقد بدأ بالمناوبات الليلية ليلة الأول من شهر كانون الثاني، والسؤال هو: هل يناوب الطبيب المذكور ليلة السادس والعشرين من ذلك الشهر ؟

الجواب، من الطبيعي أن تقوم بترتيب الليالي التي يناوب فيها الطبيب سعدون خلال ذلك الشهر كما يلي:

١، ٦، ١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ٣١، ومن الترتيب نلاحظ أنه يناوب في ليلة السادس والعشرين من ذلك الشهر، هذا المثال وأمثاله العديدة يُدلل على خاصية لترتيب الأعداد على نمط أو نسق معين نسميه متتالية.

فالمتتالية أعداد حقيقية مرتبة وفق قاعدة ضمنية أو صريحة أو بلا قاعدة أحياناً أخرى.

وأما بلغة الاقترانات فالمتتالية اقتران مجاله الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها على الصورة {١، ٢، ٣، ...، ن} ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح.

أي أن المتتالية: اقتران من ط* ⟵ ح

وعناصر مجموعة مجال الاقتران ط* أو أجزائها تسمى حدود المتتالية فالمتتالية السابقة: ١، ٦، ١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ٣١ توضح ما يلي:

إن العدد الأول في المتتالية وهو (١) يُسمى الحد الأول ويرمز له بالرمز $ح_١$ أو $أ_١$.

والعدد الذي يليه وهو (٦) يُسمى الحد الثاني ويرمز له بالرموز ح٢ ، أ٢.

وهكذا:

إذ يرمز للحد العام في المتتالية بالرمز ح ن أو أ ن أحياناً.

والحد العام ح ن : هو الحد الذي يولّد جميع حدود المتتالية هكذا:

⇦مثال: إذا كان الحد العام لمتتالية هو ح ن = ن^{٢} أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها وكأن ح ن اقتران مجاله ن ومداه ن^{٢}

أي أن ح ن ؛ اقتران من ن ⟵ ن^{٢}

لذلك فإن ح١ = (١)^{٢} = ١ الحد الأول

ح٢ = (٢)^{٢} = ٤ الحد الثاني

ح٣ = (٣)^{٢} = ٩ الحد الثالث

فالمتتالية هي: ١ ، ٤ ، ٩ ، ... ، ن^{٢}

إذا كان عدد حدود المتتالية منتهي أو مجال الاقتران (المتتالية) مجموعة محدودة تسمى المتتالية منتهية مثل:

المتتالية: ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٤

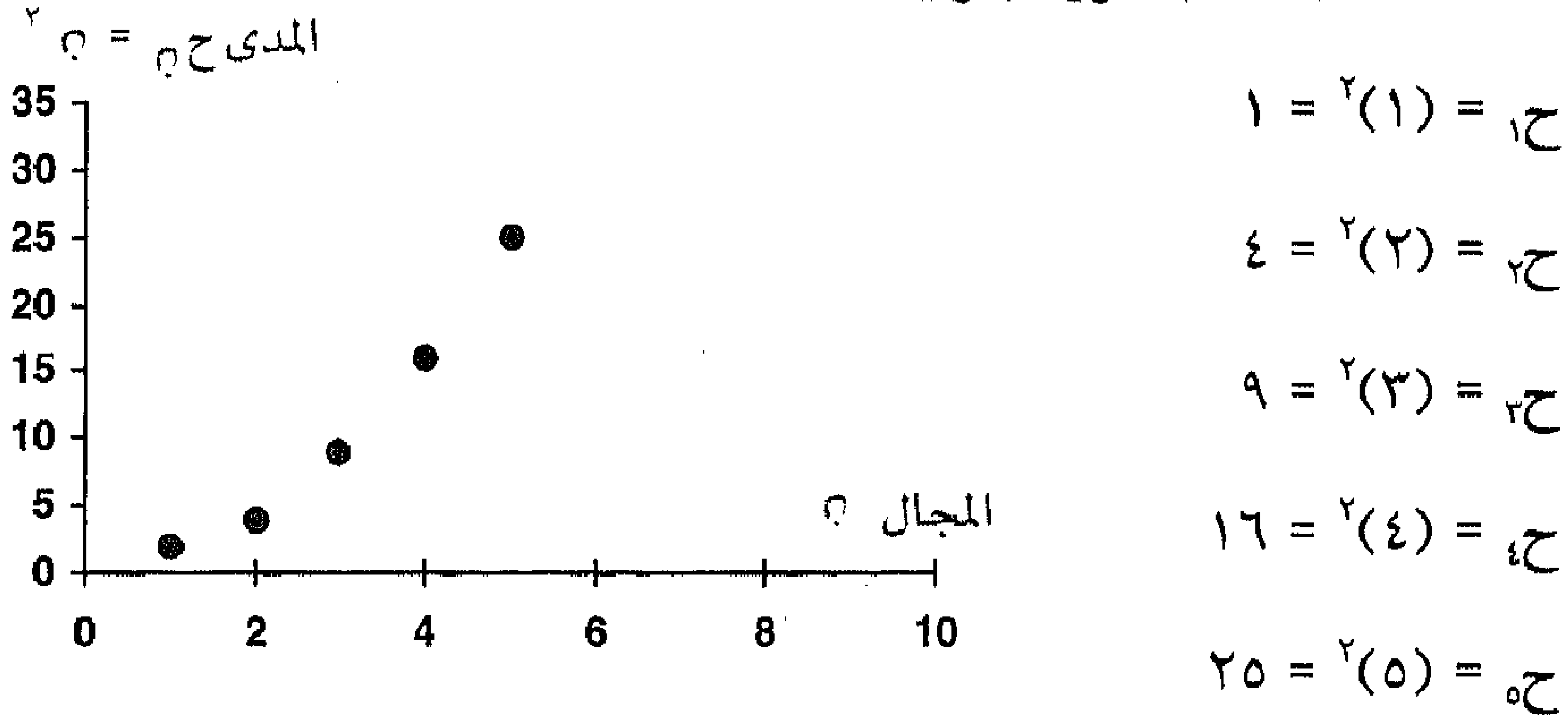
وإذا كان عدد حدود المتتالية غير منتهي أو مجال الاقتران (المتتالية) مجموعة غير محدودة تسمى المتتالية غير منتهية مثل:

المتتالية: ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٤ ، .... ، إلخ.

وبما أن المتتالية اقتران يمكن تمثيلها بيانياً على المستوى الديكارتي بنقط منفصلة تمثل أزواجاً مرتبة مسقطها الأول المجال = ن ومسقطها الثاني

المدى = $ح_ن$ ،وذلك بأن تُخصص محور السينات الموجب لمجال المتتالية (رتب الحدود فيها) وهو ن ∈ ط* وتخصص محور الصادات لمدى المتتالية (قيم الحدود فيها) وهو $ح_ن$ ∈ ح وهكذا:

⇦مثال: اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام $ح_ن$ = $ن^٢$ ومثل هذه المتتالية بيانياً بصورة جزئية.



$ح_١$ = $(١)^٢$ = ١

$ح_٢$ = $(٢)^٢$ = ٤

$ح_٣$ = $(٣)^٢$ = ٩

$ح_٤$ = $(٤)^٢$ = ١٦

$ح_٥$ = $(٥)^٢$ = ٢٥

وأبسط أشكال المتتاليات متتالية الأعداد الطبيعية ط* = ١، ٢، ٣، ...، ن

أما المتسلسلة Series فهي: مجموعة من الحدود (حدود المتتالية) يرتبط كل منها بالحد الذي يسبقه والذي يليه بعملية رياضية ثابتة كأن تكون عملية جمع أو طرح، فالمتسلسة متتالية حدودها ترتبط بالإشارتين +، - بدلاً من الفواصل «،» وأبسط أشكال المتسلسلات هي مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بعد ربط كل عدد طبيعي فيها بالذي يليه بإشارة الجمع هكذا:

١ + ٢ + ٣ + ... + ن ، ن ∈ ط*

فالمتسلسلة هي المجموع الدال على حدود المتتالية دون إيجاد هذا المجموع.

هذا ويستخدم رمز المجموع $\sum$ للتعبير عن الصورة المختصرة

للمتسلسلة إذا كان لترتيبها حد عام هكذا:

⇦مثال: $\sum_{ر=1}^{ن}$ ر^2 وبعد فكه تتولد المتسلسلة التالية:

$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + ... + (ن)^2$

$= 1 + 4 + 9 + ... + ن^2$

هذا وتلازم المتسلسلة المتتالية المرافقة في جميع الأوقات وكأنها والمتتالية سيان إلا أنها تختلف عنها كون حدود المتتالية مفصولة عن بعضها البعض بالواصل «،» وأما المتسلسلة فترتبط حدودها بالإشارات الموجبة هكذا:

٢ ، ٣، ٥ ، ٧، ....   متتالية الأعداد الأولية.

وأما ٢ + ٣ + ٥ +٧ + ...   المتسلسلة الأعداد الأولية

⇦مثال: أكتب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية والمتسلسلة المرافقة لها والتي حدها العام $ح_ن = (-\frac{1}{2})^ن$

نجد الحدود:

$ح_1 = (-\frac{1}{2})^1 = -\frac{1}{2}$

$ح_2 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$ح_3 = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$

فالمتتالية: $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{8}$ ، ...، $(-\frac{1}{2})^ن$

المتسلسلة: $(-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{8}) + ... + (-\frac{1}{2})^ن$

⇦مثال: أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي حدها العام$ح_ن = 7$

$ح_١ = ٧$

$ح_٢ = ٧$

$ح_٣ = ٧$

$ح_٤ = ٧$

$ح_٥ = ٧$

فالمتتالية: ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ....، ٧

⇦مثال: أكتب حدود المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٧} ٢^{ر}$ دون رمز المجموع

$ح_١ = ٢^{١} = ٢$

$ح_٢ = ٢^{٢} = ٤$

$ح_٣ = ٢^{٣} = ٨$

$ح_٤ = ٢^{٤} = ١٦$

$ح_٥ = ٢^{٥} = ٣٢$

$ح_٦ = ٢^{٦} = ٦٤$

$ح_٧ = ٢^{٧} = ١٢٨$

$\therefore \sum_{ر=١}^{٧} ٢^{ر} = ٢ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ٦٤ + ١٢٨$

دون إيجاد قيمة المجموع للحدود.

⇦مثال: جد قيمة $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٣)$

نجد الحدود ونجمعها أيضاً ⟵ معناه قيمة المجموع

قيمة $\sum_{ر=١}^{٤} ر^٣ = (١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + (٤)^٣$

$= ١٠٠$

⇦مثال: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} (-١)^{ر-١}$

$ح_١ = (-١)^{١-١} = (-١)^٠ = ١$

$ح_٢ = (-١)^{٢-١} = (-١)^١ = -١$

$ح_٣ = (-١)^{٣-١} = (-١)^٢ = ١$

$ح_٤ = (-١)^{٤-١} = (-١)^٣ = -١$

$ح_٥ = (-١)^{٥-١} = (-١)^٤ = ١$

فإن $\sum_{ر=١}^{\infty} (-١)^{ر-١} = ١ - ١ + ١ - ١ + ١ - ١ + ... + (-١)^{ر-١}$

(١٥ - ٢) المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

المتتالية الحسابية Arithmic Sequence

هي مجموعة من الأعداد الحقيقية المرتبة بطريقة يمكن الحصول على أي حدٍ منها بإضافة عدد موجب أو سالب إلى العدد السابق له مباشرة:

وهذا العدد الموجب أو السالب يُسمى أساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز ء وهذه الأعداد المرتبة تسمى حدود المتتالية الحسابية.

حدها الأول يرمز له بالرمز أ دائماً أو $ح_١$ ورتبته ١

وحدها الثاني يرمز له بالرمز $ح_٢$ ورتبته ٢ وهكذا

وإن حدود المتتالية الحسابية مرتبة بحيث أن الفرق بين أ ي حدين متتاليين فيها يساوي الأساس وهو عدد ثابت كما في المثال:

الأعداد ٥ ، ٨، ١١ ، ١٤ ، ... تكون متتالية حسابية

لأن الحد الثاني – الحد الأول = الحد الثاني – الحد الثاني = ...

أي أن $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ...$

كون ٨ - ٥ = ١١ - ٨ =٣

وكأنك تستطيع أن تكون متتالية حسابية بإضافة الأساس «ء» إلى كل حد سابق لينتج الحد اللاحق له هكذا وبالرموز.

الحد الأول $ح_١$ = أ دائماً = أ + (١ - ١) ء

الحد الثاني $ح_٢$ = أ + ء = أ + (٢ - ١) ء

الحد الثالث $ح_٣$ = أ + ى + ى = أ + ٢ ى + ى = أ + (٣ - ١) ى

الحد الرابع $ح_٤$ = أ + ٢ ى + ى = أ + ٣ ى + ى = أ + (٤ - ١) ى

الحد النوني $ح_ن$ = أ + (ن - ١) ى

ويسمى $ح_ن$ باسم الحد العام General Term

ومنه: $ح_ن$ = أ + (ن - ١) ى

حيث

أ : الحد الأول

ى : الأساس

ن : عدد الحدود أو رتبة الحد العام

ويستخدم الحد العام في إيجاد قيمة أي حد من حدود المتتالية الحسابية دون اللجوء إلى معرفة قيم الحدود السابقة أو اللاحقة له.

⇦مثال: أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية: ٥، ٨، ١١، ١٤، ....

بما أن أ = ٥ الحد الأول

ى = ٨ - ٥ = ١١ - ٨ = ٣ الأساس

فهي بالتأكيد حسابية

∴ $ح_ن$ = أ = (ن - ١) ى

= ٥ + (ن - ١) (٣) = ٥ + ٣ن - ٣

$ح_ن$ = ٣ ن + ٢ الحدالعام ومنه:

$ح_٥$ = ٣ (٥) + ٢ = ١٧

$ح_٦$ = ٣ (٦) + ٢ = ٢٠ وهكذا.

أما المتسلسلة الحسابية Arithemetic Series

فترتبط بالمتتالية الحسابية ارتباطاً وثيقاً إذ تنبثق عنها بعد تبديل الفواصل «،» بين حدود المتتالية بالإشارة «+» هكذا

فإذا كانت المتتالية الحسابية على الصورة: ٢، ٧، ١٢، ...، (٥ن − ٣)

فالمتسلسلة الحسابية تكون على الصورة: ٢+ ٧+ ١٢+ ...+ (٥ن − ٣)

ويمكن التعبير عن المتسلسة الحسابية باستخدام رمز المجموع $\sum$ دون إيجاد قيمة المجموع هكذا:

$$\sum_{ن=١}^{ن} (٥ن - ٣) = ٢ + ٧ + ١٢ + ... + (٥ن - ٣)$$

وكأن لكل متتالية حسابية هناك متسلسلة حسابية مرافقة والعكس صواب.

للمتتالية الحسابية ١، ٢، ٣، ...، ن

هناك متسلسلة الحسابية ١+ ٢ + ٣ + ...+ ن

أو للمتسلسلة الحسابية ٢+ ٤ + ٦ + ...+ ٢ن

هناك متتالية حسابية ٢، ٤، ٦، ...، ٢ن

والحد العام $ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) ى هو للمتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية أيضاً .

⇦مثال: أكتب المتسلسلة الحسابية التالية دون استخدام رمز المجموع $\sum$

$$\sum_{ن=١}^{٥} ٣ن = ٣(١) + ٣(٢) + ٣(٣) + ٣(٤) + ٣(٥)$$

= ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥

وهي متسلسلة حسابية حدها الأول أ = ٣، وأساسها د = ٣ - ٦ = ٩ - ٦ = ٣

⇦مثال: أكتب حدود المتسلسلة التالية $\sum_{ن=١}^{\infty}$ ٣ ن دون استخدام رمز المجموع.

بما أن المتسلسلة لا نهائية فإننا نكتفي بكتابة الحدود الثلاثة الأولى على الأقل ونتبعها بثلاث نقط كونها علامة الحذف باللغة العربية هكذا.

$\sum_{ن=١}^{\infty}$ ٣ن = ٣ (١) + ٣ (٢) + ٣ (٣) + ...

= ٣ + ٦ + ٩ + ...

⇦مثال: أيٌّ من المتتاليات أو المتسلسلات الآتية حسابية:

(١) $ح_ن$ = ٤ن - ٣

(٢) $\sum_{ن=١}^{\infty}$ ٧

(٣) ١ + $\frac{١}{٢}$ + (- $\frac{١}{٢}$) + (- ١)

الطريقة: نجد الحدود الثلاثة الأولى والأساس فإذا كان الفرق بين كل حدين متتاليين ثابت هو د أي $ح_٣ - ح_٢ = ح_٢ - ح_١ =$ د كانت حسابية وإلا فلا.

أولاً:

$ح_ن$ = ٤ ن - ٣

$ح_١$ = ٤(١) - ٣ = ١

$ح_{٢}$ = ٤(٢) − ٣ = ٥

$ح_{٣}$ = ٤(٣) − ٣ = ٩

الأساس = ٥ − ١ = ٩ − ٥ = ٤ = د

فالمتتالية ١، ٥، ٩، .... حسابية

و$ح_{ن}$ = أ + (ن − ١) د = ١ + (ن − ١) (٤) = ١ + ٤ن − ٤

= ٤ن − ٣ كما هو وارد بالسؤال.

ثانياً:

$\sum_{ن=١}^{\infty}$ ٧ = ٧ + ٧ + ٧ + ...

٧ − ٧ = ٧ − ٧ = صفر

فالمتسلسلة ٧ + ٧ + ٧ + ... حسابية

وحدها العام:

والحد العام

$ح_{ن}$ = أ + (ن − ١)

= ٧ + (ن − ١) (صفر) = ٧ كما هو وارد بالسؤال

ثالثاً:

١ + $\frac{١}{٢}$ + (−$\frac{١}{٢}$) + (−١)

الأساس: $\frac{١}{٢}$ − ١ = −$\frac{١}{٢}$

- $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ = - ١

- ١ - (- $\frac{١}{٢}$) = - ١ + $\frac{١}{٢}$ = - $\frac{١}{٢}$

فالأساس غير ثابت فالمتسلسلة غير حسابية.

⇦مثال: ما هو عدد حدود المتسلسلة الحسابية التالية ؟

٨ + ٣ + (- ٢) + ... + (- ٥١٢)

الحد العام هو ما نريد وهو الحد الأخير

أ = ٨، د = ٣ - ٨ = - ٢ - ٣ = - ٥

والحد الأخير هو الحد العام رتبته هي حن

حن = أ + (ن - ١) د

- ٥١٢ = ٨ + (ن - ١) (- ٥)

ومنها ن = ١٠٥ حدود.

■ الوسط الحسابي والأوساط الحسابية لعددين حقيقيين

الوسط الحسابي لعددين حقيقيين Arithmetic Means

ويسمى أحياناً المعدل Average

ويرمز له بالرمز سَ.

ويُعرف سَ بأنه مجموع العددين مقسوماً على ٢.

أو سَ = $\frac{أ + ب}{٢}$ حيث العددين الحقيقيين أ ، ب

والوسط الحسابي لعددين هو العدد الحقيقي الذي يُحصر بينهما

التشكل الأعداد الثلاثة هو والعددين متتالية حسابية.

مثال: أوجد الوسط الحسابي للعددين ٦ ، ١٢

وكأن ٦ ، سَ، ١٢ متتالية حسابية

لذا فإن سَ - ٦ = ١٢ - سَ

سَ + سَ = ١٢ + ٦

٢ سَ = ١٨

سَ = ٩

أو بإيجاز شديد: سَ = $\frac{أ + ب}{٢} = \frac{٦ + ١٢}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$

أما الأوساط الحسابية Arithmetic Means لعددين فهي الأعداد الحقيقية $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... $س_ن$ التي تشكل مع العددين متتالية حسابية.

أي أن أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... $س_ن$ ، ب متتالية حسابية.

وأما الحل فيكون كالتالي:

مثال: أدخل بين العددين ١٠ ، ٣٨ ستة أوساط حسابية.

الحل: ٦ أوساط حسابية + العددين = ٨ حدود

عدد حدود المتتالية الحسابية ١٠ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ..... ، $س_٦$ ، ٣٨ هو ٨ حدود.

حدها الأول أ = ١٠

حدها الثامن $ح_٨$ = أ + (٨ - ١) ء = أ + ٧ ء = ٣٨

أي أن ٣٨ = ١٠ + ٧ ء

٣٨ - ١٠ = ٢٨ = ٧ ء

ومنها ء = ٤ الأساس

فالأوساط الحسابية: ١٤، ١٨، ٢٢، ٢٦، ٣٠، ٣٤ الستة

■ مجموع المتسلسلة الحسابية Sum of A. S.

للمتسلسة الحسابية بشكل خاص – ودون المتتالية الحسابية – يمكن إيجاد مجموع أي عدد من حدودها الأولى بالقانون.

إذا رمزنا لمجموع ن من حدودها الأولى بالرمز حـ ن

والحد الأول بالرمز أ كما أسلفنا ولحدها الأخير (العام) ح ن

فإن حـ ن = $\frac{١}{٢}$ ن (أ + ح ن) ولمّا كان الحد الأخير (العام) ح ن

ح ن = أ + (ن - ١) ء كما مرّ سابقاً فإن:

حـ ن = $\frac{١}{٢}$ ن {أ + أ + (ن - ١) ء}

= $\frac{١}{٢}$ ن {٢ أ + (ن - ١) ء}

⇦مثال: أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى للمتسلسلة الحسابية:

$$\sum_{ن=١}^{\infty} ٥ ن$$

هناك طريقتان للحل:

الأولى: أ = ٥ (١) = ٥

ح ١٠ = ١٠ (٥) = ٥٠

$$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} \{ ٥ + ٥٠ \} = ٥ (٥٥) = ٢٧٥$$

الثانية: $ح_١ = أ = ٥ (١) = ٥$

$ن = ١٠$

$ح_٢ = ٥ (٢) = ١٠$

ومنه $ى = ١٠ - ٥ = ٥$

$$\therefore ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} \{ ٢ (٥) + (١٠ - ١) ٥ \} = ٥ (١٠ + ٤٥)$$

$$= ٥ (٥٥) = ٢٧٥$$

والطريقتان تؤديان إلى نفس النتيجة كما ترى.

⇦مثال: أوجد العشرين حد الأولى من المتسلسلة

٦ + ١٠ + ١٤ +.....

$ح_١ = أ = ٦$

$ى = ١٠ - ٦ = ٤$

$$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \{ ٢ (٦) + (٢٠ - ١) (٤) \}$$

$$= ١٠ \{ ١٢ + ٧٦ \} = ١٠ (٨٨) = ٨٨٠$$

⇦مثال تطبيقي:

إذا كان دخل سائد السنوي ١٠٠٠ دينار وكان يتزايد بمقدار ١٥٠ ديناراً سنوياً فإذا كان يدخر من دخله ٨٪ سنوياً أوجد مُدخراته في نهاية عشرين عام.

مدخراته خلال السنة الأولى = $\frac{٨}{١٠٠} \times ١٠٠٠ = ٨٠$ دينار

مدخراته خلال السنة الثانية = $\frac{٨}{١٠٠} \times (١٠٠٠ + ١٥٠)$

= $\frac{٨}{١٠٠} \times ١١٥٠ = ٩٢$ دينار

مدخراته خلال السنة الثالثة = $\frac{٨}{١٠٠} \times (١١٥٠ + ١٥٠)$

= $\frac{٨}{١٠٠} \times ١٢٠٠ = ١٠٤$ دينار

فالمدخرات تشكل متسلسلة حسابية هكذا

٨٠ + ٩٢ + ١٠٤ + ... حتى ٢٠ عام.

$ح_١ = أ = ٨٠$

ء = ٩٢ - ٨٠ = ١٠٤ - ٩٢ = ١٢ دينار

$حـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \{ ٨٠ (٢) + (٢٠ - ١) (١٢) \} = ١٠ (١٦٠ + ٢٢٨)$

= ٣٨٨٠ دينار

(١٥ - ٣) المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

مجموعة من الأعداد الحقيقية مرتبة بطريقة يمكن الحصول على أي عدد منها بضرب العدد السابق له مباشرة بعدد حقيقي ثابت موجب أو سالب يسمى أساس المتتالية الهندسية Common Ratio of an G. S

ويرمز له بالرمز «ر» وهذه الأعداد المرتبة تُسمى حدود المتتالية الهندسية وحدها الأول $ح_١$ = أ دائماً.

وهذا الأساس «ر» هو النسبة الثابتة بين أي حدين متتاليين من حدودها

هكذا: للمتتالية الهندسية $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، ....

$$ف ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{ح_3}{ح_2} = ...$$

فالأعداد ٣، ٦، ١٢، .... تشكل متتالية هندسية حدها الأول أ = ٣

وأساسها $ر = \frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

وكأنك تستطيع تكوين المتتالية الهندسية إذا علمت حدها الأول = أ

وأساسها = ى ، هكذا

$ح_1 = أ$ $\quad = أ ر^{١ - ١} = أ ر^{٠}$

$ح_2 = (أ) (ر) = أ ر$ $\quad = أ ر^{٢ - ١} = أ ر^{١}$

$ح_3 = (أ ر) (ر) = أ ر^{٢}$ $\quad = أ ر^{٣ - ١} = أ ر^{٢}$

⋮

$ح_ن = أ ر^{ن - ١}$ ويسمى الحد العام للمتتالية الهندسية General Term of G. s

ومنه يمكن إيجاد أي حد بالمتتالية دون الرجوع إلى الحدود السابقة أو اللاحقة له هكذا.

⇦مثال: أوجد $ح_ن$ من المتتالية الهندسية ٥، ١٠، ٢٠، ...

أولاً نجد الحد العام: $ح_ن$

أ = ٥

$ر = \frac{١٠}{٥} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$

$\therefore ح_ن = أ ر^{ن - ١} = (٥) (٢)^{ن - ١} = (٥) (٢)^{ن} (٢^{-١})$

$$= \frac{٥}{٢} \; (٢^{ن}) = (\frac{٥}{٢})\;(٢^{ن})$$

$$\text{ومنه } ح_{٥} = (\frac{٥}{٢})\;(٢^{٥}) = (\frac{٥}{٢})\;(٣٢) = (٥)\;(١٦) = ٨٠$$

الوسط الهندسي لعددين موجبين أو سالبين معاً والأوساط الهندسية الأخرى.

الوسط الهندسي للعددين أ ، ب هو العدد «ي» والذي يشكل مع العددين المذكورين متتالية هندسية هكذا: أ، ي، ب متتالية هندسية.

أساسها: $\frac{ي}{أ} = \frac{ب}{ي}$ وبالضرب التبادلي

$(ي)^{٢} = أ\,ب$

ومنه ي = $\sqrt{أ\,ب}$ ومن هنا جاء الشرط التالي موجبين أو سالبين معاً.

حتى يكون $\sqrt{أ\,ب} = \sqrt{(-\,أ)\,(-\,ب)} = \sqrt{أ\,ب}$ عدد حقيقي.

⇦مثال: أوجد الوسط الهندسي للعددين: − ٣، − ٢٧

$$ي = \sqrt{(-\,٣)\,(-\,٢٧)} = \sqrt{٨١} = \pm\,٩$$

أو − ٣، ي، − ٢٧ متتالية هندسية

$$\frac{ي}{-\,٣} = \frac{-\,٢٧}{ي}$$

$$ي^{٢} = (-\,٣)\,(-\,٢٧)$$

$$\therefore\; ي = \sqrt{(-\,٣)\,(-\,٢٧)} = \sqrt{٨١} = \pm\,٩$$

وبشكل عام إذا كانت الأعداد أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... $س_{ن}$ ، ب متتالية هندسية فإن الأعداد $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... $س_{ن}$ تسمى أوساطاً هندسية بين العددين أ ، ب حيث أ ، ب لهما نفس الإشارة في نفس الوقت (متفقان بالإشارة)

⇦مثال: أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين ٣، ٩٦

المتتالية الهندسية ٣، $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، $س_٤$، ٩٦

حدها الأول أ = ٣

حدها السادس = $ح_٦$ = ٩٦

لكن $ح_٦$ = أ $ر^{٦-١}$ = أ $ر^٥$ = ٩٦

أي $\frac{٣}{٣}$ ($ر^٥$) = $\frac{٩٦}{٣}$ ⟵ $ر^٥$ = ٣٢ ر = $\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢ الأساس ر

ومنه $س_١$ = ٣ (٢) = ٦

$س_٢$ = ٦ (٢) = ١٢

$س_٣$ = ١٢ (٢) = ٢٤

$س_٤$ = ٢٤ (٢) = ٤٨

أي أن ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨ الأوساط الهندسية المطلوبة

هناك ملحوظة تتبادر إلى الأذهان يمكن صياغتها على شكل سؤال هكذا: ما العلاقة بين الوسطين الحسابي والهندسي لعددين موجبين؟

العلاقة تكمن في متباينة الوسط الحسابي والهندسي A and G Inquality والتي مفادها:

لكلٍ من العددين الحقيقيين الغير سالبين أ، ب فإن الوسط الحسابي لهما أكبر من أو يساوي الوسط الهندسي لهما هكذا:

بالرموز $\frac{أ+ب}{٢} \geq \sqrt{أ ب}$

والبيان كما في المثال:

عندما أ = ٤، ب = ١٦

فإن الوسط الحسابي = $\frac{٤ + ١٦}{٢}$ = ١٠

والوسط الهندسي لهما = $\sqrt{٤ \times ١٦}$ = ٢ × ٤ = ٨

أي أن $\frac{٤ + ١٦}{٢} \geq \sqrt{٤ \times ١٦}$

كون ١٠ ≥ ٨

أما المتسلسلة الهندسية Geometric Seires

ترتبط المتسلسلة الهندسية بالمتتالية الهندسية المرافقة لها وتنبثق عنها بعد استبدال الفواصل «،» بين حدودها بالإشارات «+» هكذا:

فالمتتالية الهندسية: ٥، ١٠، ٢٠، ....

تنبثق منها المتسلسلة الهندسية: ٥ + ١٠ + ٢٠ + ...

والحد العام للمتتالية الهندسية

$ح_ن = أ ر^{ن - ١}$ هو نفسه الحد العام للمتسلسلة الهندسية المنبثقة ولكن يمكن كتابة المتسلسلة الهندسية باستخدام رمز المجموع $\sum$ دون عملية جمع الحدود إطلاقاً كما يلي:

المتسلسلة أ + أ ر + أ $ر^٢$ + ... + أ $ر^{ن - ١}$، يمكن كتابتها على الصورة $\sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ن - ١}$ حيث ن رتبة الحد العام.

هذا إذا كانت المتسلسلة منتهية، وإلاّ فتكتب على الصورة:

$\sum_{ر=١}^{\infty} أ ر^{ن - ١}$ إذا كانت المتسلسلة غير منتهية.

مثال: أكتب المتسلسلة الهندسية $\sum_{ر=1}^{5} ٣^{ر}$ دون رمز المجموع.

$ح_1 = ٣^1 = ٣$

$ح_2 = ٣^2 = ٩$

$ح_3 = ٣^3 = ٢٧$

$ح_4 = ٣^4 = ٨١$

$ح_5 = ٣^5 = ٢٤٣$

فالمتسلسلة $\sum_{ر=1}^{5} ٣^{ر} = ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ٢٤٣$

حدها الأول = ٣ وأساسها $ر = \frac{٩}{٣} = ٣$

مثال: أكتب المتسلسلة التالية دون استخدام رمز المجموع $\sum_{ن=1}^{\infty} ٣^{ن}$

بما أنها متسلسلة هندسية غير منتهية لذا لا يمكن كتابة جميع حدودها بل نكتفي بكتابة ثلاثة منها على الأقل ونتبعها بثلاث نقط كونها علامة الحذف في اللغة العربية هكذا:

$$\sum_{ن=1}^{\infty} ٣^{ن} = ٣^1 + ٣^2 + ٣^3 + \cdots\cdots$$

$$= ٣ + ٩ + ٢٧ + \cdots\cdots$$

في المتسلسلة الهندسية – دون المتتالية الهندسية – يمكن إيجاد مجموع أي عدد من حدودها الأولى وبالقانون:

إذا رمزنا لمجموع ن من الحد الأول لمتسلسلة هندسية بالرمز $حـ_{ن}$

فإن $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ حيث $ر < ١$

أو

$ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ حيث $ر > ١$

ولتجنب الإشارات السالبة في البسط والمقام

كون ر بالحالتين لا تساوي العدد ١ أي $ر \neq ١$

حتى لا يصبح المقام في كليهما = صفر.

⇦مثال: أوجد الثامن من المتسلسلة ٣ + ٦ + ١٢ + ...

حدها الأول = أ = ٣

أساسها = $\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢ = ر$

فهي هندسية حدها العام: $ح_ن = أ ر^{ن - ١} = (٣)(٢)^{٨ - ١} = ٣ \times ٢^٧ = ٣٨٤$

⇦مثال: أوجد مجموع أول ثمانية حدود من المتسلسلة ١ + ٢ + ٤ + ...

حدها الأول = أ = ١

أساسها = $\frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = ٢ = ر$

كون $ر > ١$

$\therefore ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ حيث $ر > ١$

$\therefore ح_٨ = \frac{(١)(٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = \frac{٢٥٦ - ١}{١} = ٢٥٥$

وفي السياق سنناقش العلاقة بين المتسلسلة الهندسية والرياضيات المالية وفوائدها من حيث، ادخار الأموال في المصارف والمؤسسات المالية،

وسيتم النقاش من خلال مفهومين:

المفهوم الأول: القيمة المستقبلية لدفعات منظمة « Future Value of an Ordinary Annuity »

وهو جملة مبالغ تستثمر في البنوك في انتظام كما في هذا المثال:

⇦مثال: يوفر حسام في كل شهر مبلغ ١٠٠ دينار من عمله الإضافي ويودعها في نهاية كل شهر لدى أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها ٣٪ سنوياً تحسب كل شهر، كم تبلغ جملة ما يوفره حسام في سنة واحدة.

الحل والتفسير:

الدفعة الأولى ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ١ = ١١ شهر

حيث تودع في نهاية الشهر الأول

الدفعة الثانية ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ٢ = ١٠ شهور

حيث تودع في نهاية الشهر الثاني

الدفعة الثانية ١٠٠ دينار تحتسب فوائدها لمدة ١٢ - ٣ = ٩ شهور

حيث تودع في نهاية الشهر الثالث.

وهكذا حتى أن الدفعة الثانية عشر (الأخيرة) لا تحتسب عليها فوائد كونها أودعت في نهاية السنة ١٢ - ١٢ = صفر شهر تبقى في البنك.

ومعدل الفائدة الشهري = $\frac{\text{ف}}{\text{ك}}$ = $\frac{٠٫٠٣}{١٢}$ = $\frac{٠٫٠٠٢٥}{١}$ = ٠٫٠٠٢٥

وعليه فإن:

جملة الدفعة الأولى = م $(١٫٠٠٢٥)^{ن}$ = ١٠٠ $(١٫٠٠٢٥)^{١١}$

جملة الدفعة الثانية = $= ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١٠}$

جملة الدفعة الثالثة = $= ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{٩}$

⋮

وجملة الدفعة الأخيرة = $= ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{٠}$

وعند جمع جملة الدفعات $حـ_{١٢} = ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١١} + ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١٠} +$ $١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{٩} + \cdots + ١٠٠$

ولا مانع بتغيير أماكن الحدود هكذا: الأخير يصبح إلى ....

$حـ_{١٢} = ١٠٠ + ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١} + ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{٢} + \cdots + ١٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١١}$

والتي تمثل مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ١٠٠

وأساسها ر = ١,٠٠٢٥ وعدد حدودها ن = ١٢

واستخدام القانون $حـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \frac{١٠٠ \{(١,٠٠٢٥)^{١٢} - ١\}}{١,٠٠٢٥ - ١}$

= ١٢١٦,٦٤ دينار تقريباً

ولكن توخياً للإيجاز وعدم الإسهاب نستخدم القانون التالي:

$$جـ = \frac{م \{(١ + ف)^{ن} - ١\}}{ف}$$

حيث: جـ = القيمة المستقبلية لدفعات منتظمة

م = القيمة الحالية لكل دفعة

ف = معدل الفائدة المركبة عن وحدة الزمن

ن = عدد الدفعات في مدة الاستثمار.

$$\text{ومنها جـ} = \frac{١٠٠ \{(١ + ١,٠٠٢٥) - ١\}}{١,٠٠٢٥}$$

$$= \frac{١٠٠ \{(١,٠٠٢٥)^{١٢} - ١\}}{١,٠٠٢٥}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة ينتج الجواب السابق.

⇦مثال: يقوم حسّان بإيداع مبلغ ٢٠٠٠ دينار كل نصف سنة لدى أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤٪ تحسب الفوائد كل نصف سنة:

احسب جملة الدفعات في نهاية ٥ سنوات والفائدة المركبة التي يحصل عليها.

م = ٢٠٠٠ دينار، ف = $\frac{٠,٠٤}{٢}$ = ٠,٠٢ ، ن = ٥ × ٢ = ١٠ فترات زمنية.

$$\text{جـ} = \frac{٢٠٠٠ \{(١,٠٢)^{١٠} - ١\}}{٠,٠٢} = \frac{٢٠٠٠ (١,٢١٨٩ - ١)}{٠,٠٢}$$

$$= \frac{٢٠٠٠ (٠,٢١٨٩)}{٠,٠٢} = \frac{٢٠٠٠ \times ٢١,٨٩}{٠,٢} = ٢١٨٩٠ \text{ دينار}$$

ف مركبة = الجملة – المبالغ

= ٢١٨٩٠ - ١٠ (٢٠٠٠)

= ٢١٨٩٠ - ٢٠ ٠٠٠ = ١٨٩٠ دينار

المفهوم الثاني: القيمة الحالية لدفعات منتظمة « Present Value of an Ordinary Annuity»

وهو المبلغ من المال الذي يجب استثماره اليوم بفائدة مركبة معينة ولفترة زمنية محددة بهدف الحصول على دفعات (أقساط) منتظمة وتحسب القيمة الحالية للدفعة رقم ن بالعلاقة:

القيمة الحالية ح = مبلغ الدفعة $(١ + ف)^{-ن}$

حيث ف: معدل الفائدة المركبة للفترة الزمنية

⇦مثال: يريد سهاد استثمار مبلغ من المال في أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٦٪ وتحسب فوائدها كل شهر لكي يُسدد أقساطاً شهرية قيمة كل منها ٢٠٠ دينار تسحب من رصيده في نهاية كل شهر ولمدة سنة فما قيمة المبلغ الذي يجب على سهاد إيداعه في البنك الآن وما المبلغ الذي سوف يوفره بهذه العملية التجارية ؟

الحل والتفسير: عدد الدفعات الشهرية = ١٢ ومبلغ كل منها = ٢٠٠ دينار

معدل الفائدة = ف = $\frac{٠,٠٦}{١٢}$ = ٠,٠٠٥ شهرياً

القيمة الحالية للدفعة الأولى = ٢٠٠ $(١,٠٠٥)^{-١}$ = $\frac{٢٠٠}{١,٠٠٥}$

القيمة الحالية للدفعة الثانية = ٢٠٠ $(١,٠٠٥)^{-٢}$ = $\frac{٢٠٠}{(١,٠٠٥)^{٢}}$

القيمة الحالية للدفعة الثالثة = ٢٠٠ $(١,٠٠٥)^{-٣}$ = $\frac{٢٠٠}{(١,٠٠٥)^{٣}}$

⋮

القيمة الحالية للدفعة الأخيرة = ٢٠٠ $(١,٠٠٥)^{-١٢}$ = $\frac{٢٠٠}{(١,٠٠٥)^{١٢}}$

وقيم هذه الدفعات تشكل متسلسلة هندسية حدها الأول = أ = $\frac{٢٠٠}{١,٠٠٥}$

وأساسها ر = $\frac{١}{١,٠٠٥}$ وعدد حدودها ن = ١٢

$$\therefore ج_{١٢} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \frac{\frac{٢٠٠}{١,٠٠٥}\left(\left(\frac{١}{١,٠٠٥}\right)^{١٢} - ١\right)}{\frac{١}{١,٠٠٥} - ١}$$

= ٢٣٢٣,٧٩ دينار تقريباً وبعد استخدام الآلة الحاسبة.

أي أن سهاد يدفع الآن ٢٣٢٣,٧٩ دينار مقابل أن يأخذ كل شهر ولمدة سنة مبلغ ٢٠٠ دينار.

ويكون المبلغ الذي وفره سهاد = مجموع الأقساط الشهرية – القيمة الحالية للدفعات (المبلغ الذي أودعه في البنك الآن)

= (٢٠٠ × ١٢) – ٢٣٢٣,٧٩ = ٧٦,٢١ دينار تقريباً.

⇦مثال: قرّر عماد شراء غرفة نوم جديدة لأطفاله الصغار فاتفق مع صاحب معرض للأثاث أن يدفع شهرياً ١٠٠ دينار ولمدة سنة، فقام بإيداع مبلغ معين في بنك يعطي فوائد مركبة ٩٪ سنوياً تحسب الفوائد كل شهر ليسحب مبلغ القسط الشهري منه في نهاية كل شهر.

احسب المبلغ (القيمة الحالية للدفعات) الذي يودعه في البنك ؟

الحل والتفسير: عدد الدفعات الشهرية = ١٢، مبلغ كل دفعة ١٠٠ دينار.

معدل الفائدة المركبة شهرياً = $\frac{٠,٠٩}{١٢} = \frac{٩}{١٢٠٠} = ٠,٠٠٧٥$ ($\frac{٣}{٤}$ ٪)

القيمة الحالية للدفعة الأولى = $١٠٠ \, (١,٠٠٧٥)^{-١} = \frac{١٠٠}{١,٠٠٧٥}$

القيمة الحالية للدفعة الثانية = $٢٠٠ \, (١,٠٠٧٥)^{-٢} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^{٢}}$

القيمة الحالية للدفعة الثالثة = $٢٠٠ \, (١,٠٠٧٥)^{-٣} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^{٣}}$

⋮

القيمة الحالية للدفعة الأخيرة = $٢٠٠ \, (١,٠٠٧٥)^{-١٢} = \frac{١٠٠}{(١,٠٠٧٥)^{١٢}}$

∴ $جـ_{١٢}$ (القيمة الحالية للدفعات) = $\dfrac{\frac{١٠٠}{١,٠٠٧٥}\left(\left(\frac{١}{١,٠٠٧٥}\right)^{١٢} - ١\right)}{\frac{١}{١,٠٠٧٥} - ١}$

$$= \frac{٩٩ \{ \frac{١}{(١,٠٠٧٥)^{١٢}} - ١ \}}{٠,٩٩ - ١} = \frac{\frac{٩٩}{(١,٠٠٧٥)^{١٢}} - ٩٩}{- ٠,٠١}$$

$$= \frac{\frac{٩٩}{١,٢٣} - \frac{٩٩}{١}}{- ٠,٠١} = \frac{\frac{٩٩ - ١١١,٧}{١,٢٣}}{- ٠,٠١}$$

$$= \frac{- ١٢,٧}{١,٢٣} \times \frac{١}{- ٠,٠١}$$

$$= \frac{١٢٧٠٠٠}{١٢٣}$$ = ١٠٣٣ دينار.

(١٥ – ٤) المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية Convergent Infinite G. s

إنها المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي يقل فيها كل حد عن سابقه كون أساسها ر يحقق المتباينة $|ر| < ١$ أو $-١ < ر < ١$ أو $ر \in (-١ ، ١)$ وبالتالي فإنها تقترب من عدد حقيقي.

⇦مثال: المتسلسلة $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \dots\dots$

(١) هندسية كون أساسها $= \frac{\frac{١}{٢}}{١} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$ النسبة بين كل حدين متتاليين

(٢) تقاربية لأنه كلما ازدادت حدود المتسلسلة بالعدد بشكل كبير فإن مجموعها يقترب من العدد ٢ كما يلي:

$ج_{١} = ١$ مجموع الحد الأول إن جاز التعبير

$ج_{٢} = ١ + \frac{١}{٢} = ١ \frac{١}{٢}$ مجموع الحد الأول والثاني

$ج_٣ = ١\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} = ١\frac{٣}{٤}$ مجموع الحدود الثلاثة الأول والثاني والثالث

$ج_٤ = ١\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٨} = ١\frac{٧}{٨}$ مجموع الحدود الأربعة الأولى

$ج_٥ = ١\frac{٧}{٨} + \frac{١}{١٦} = ١\frac{١٥}{١٦}$ مجموع الحدود الخمسة الأولى

$ج_٦ = ١\frac{١٥}{١٦} + \frac{١}{٣٢} = ١\frac{٣١}{٣٢}$ مجموع الحدود الستة الأولى

$ج_٧ = ١\frac{٣١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤} = ١\frac{٦٣}{٦٤}$ مجموع الحدود السبعة الأولى

ومما سبق فإن $ج_ن \xrightarrow{\text{تقترب}} ٢$

عند $ن \xrightarrow{\text{تقترب}} \infty$

أو أنها $\lim_{ن \to \infty} ج_ن = ٢$

لذلك فإن $ج_{\infty}$ = (مجموع جميع حدود المتسلسلة اللانهائية التقاربية)

$$= \frac{أ}{١ - ر} \quad ، \quad |ر| < ١ \text{ ، } ر \neq \text{صفر}$$

$$= \frac{١}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ١ \times ٢ = ٢$$

وأما حدها العام $ح_ن = أ\,ر^{ن - ١}$ كالمتتاليات والمتسلسلات المنتهية تماماً.

⇦مثال: أوجد الحد السابع في المتسلسلة

$١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + \ldots$

$أ = ١٢٠$، $ر = \frac{٦٠}{١٢٠} = \frac{٣٠}{٦٠} = \frac{١}{٢} < ١$

$\therefore ح_٧ = أ\,ر^{ن - ١} = (١٢٠)\left(\left(\frac{١}{٢}\right)\right)^{٧ - ١} = (١٢٠)\left(\left(\frac{١}{٢}\right)\right)^{٦}$

$= (١٢٠)\left(\frac{١}{٦٤}\right) = \frac{١٥}{٨}$

⇦مثال: أوجد الحد السابع للمتسلسلة

$١٢٠ + (-٦٠) + ٣٠ + (-١٥) + \cdots$

$أ = ١٢٠$، $ر = \frac{-٦٠}{١٢٠} = -\frac{١}{٢}$ $\left|-\frac{١}{٢}\right| < ١$

$\therefore ح_٧ = أ ر^{ن-١} = (١٢٠)\left(\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٧-١}\right) = (١٢٠)\left(\frac{١}{٦٤}\right) = \frac{١٥}{٨}$

هذا ويمكن كتابة المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية باستخدام رمز المجموع شرط أن $|ر| < ١$ هكذا.

$$\sum_{ن=١}^{\infty}\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} + \cdots$$

$$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \cdots$$

ومن أشهر التطبيقات على مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية التقاربية هو عملية تحويل الكسر العشري الدوري إلى صورة كسر عادي (عدد نسبي) هكذا:

⇦مثال: أكتب الكسر العشري الدوري $٠{,}\overline{٣}$ على صورة كسر عادي (عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$)

بما أن $٠{,}\overline{٣} = ٠{,}٣٣٣٣\cdots$

فإن $٠{,}\overline{٣} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} + \cdots$

وهذه متسلسلة هندسية كون أساسها $= \frac{٠{,}٠٣}{٠{,}٣} = \frac{٣}{٣٠} = \frac{١}{١٠} = ر$

ولا نهائية تقاربية كون $|ر| < ١$

فإن مجموعها جـ ∞ = $\cdot,\overline{٣}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ |ر| < ١

∴ $\cdot,\overline{٣}$ = $\frac{٠,٣}{١ - ٠,١}$ = $\frac{٠,٣}{٠,٩}$ = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

«تحقق بتحويل $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشري دوري بقسمة البسط على المقام ٣ »

⇦مثال: أكتب الكسر العشري الدوري ٠,١$\overline{٤٢}$ على صورة كسر عادي (عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$)

بما أن ٠,١$\overline{٤٢}$ = ٠,١٤٢٤٢٤٢٠٠٠

فإن ٠,١$\overline{٤٢}$ = $\frac{١}{١٠}$ + ($\frac{٤٢}{١٠٠٠}$ + $\frac{٤٢}{١٠٠ ٠٠٠}$ + $\frac{٤٢}{١ ٠٠٠ ٠٠٠}$ +٠٠٠)

= $\frac{١}{١٠}$ + ($\frac{٤٢}{١٠^{٣}}$ + $\frac{٤٢}{١٠^{٥}}$ + $\frac{٤٢}{١٠^{٧}}$ + ٠٠٠)

ر = ١٠$^{-٢}$ = $\frac{١}{١٠٠}$ أساس المتسلسلة الهندسية

∴ ٠,١$\overline{٤٢}$ = ٠,١ + $\frac{أ}{١ - ر}$

= ٠,١ + $\frac{٠,٠٤٢}{١ - ٠,٠١}$ = ٠,١ + $\frac{٠,٠٤٢}{٠,٩٩}$

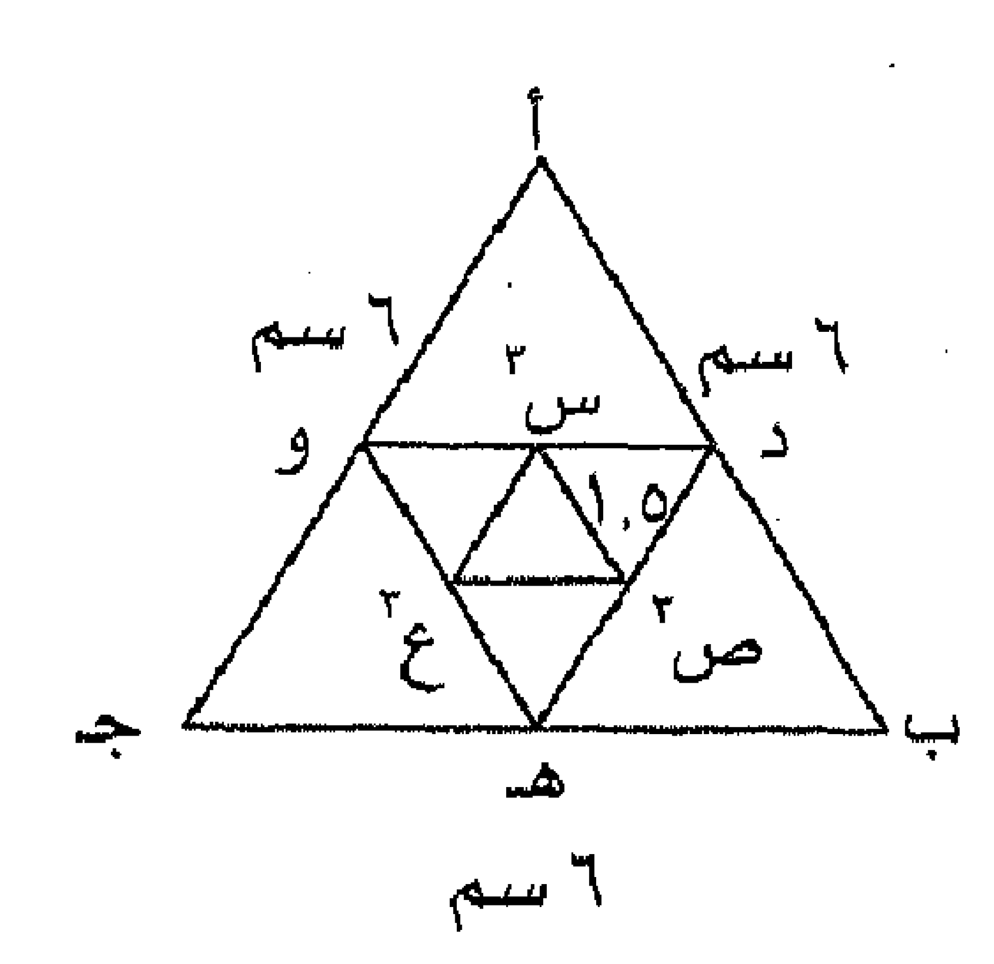
= $\frac{١٤١}{٩٩٠}$ «تحقق بتحويل $\frac{١٤١}{٩٩٠}$ إلى كسر دوري بالقسمة»

⇦مثال تطبيقي:

مثلث متساوي الأضلاع محيطه ١٨ سم نصفت أضلاعه ووصل بينها فتكون مثلث ثم نصفت أضلاع هذا المثلث ووصل بينها فتكون مثلث آخر وهكذا:

أوجد مجموع محيطات المثلثات الناتجة إلى ما لا نهاية وكذلك مجموع مساحاتها.

الشكل يوضح السؤال:



المثلثات: أ ب جـ، د هـ و، س ص ع.

محيط أ ب جـ = ١٨

محيط د هـ و = ٣ (٣) = ٩

محيط س ص ع = ٣ (١,٥) = ٤,٥

متسلسلة المحيطات ١٨ + ٩ + ٤,٥ + ...

هندسية الآن $\frac{٩}{١٨} = \frac{٤,٥}{٩} = \frac{١}{٢}$ ، $ر = \frac{١}{٢}$

لا نهائية تقاربية لأن $\frac{١}{٢} < ١$

كون ضلع د هـ و = $\frac{١}{٢}$ ضلع أ ب جـ «حسب النظرية»

«القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلثات تساوي نصف الضلع الثالث».

$$\therefore جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٨}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{\frac{١}{٢}}$$

= (١٨) (٢) = ٣٦ سم مجموع محيطات المثلثات

أما المساحات:

باستخدام القانون: مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ بَ جا جـ

= $(\frac{١}{٢})$ (٦) (٦) جا ٦٠° (كونه متساوي الأضلاع)

= $(\frac{١}{٢})$ (٦) (٦) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})$ = $٩\sqrt{٣}$

مساحة المثلث د هـ و = $\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٩}{٤}\sqrt{٣}$

مساحة المثلث س ص ع = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٩}{١٦}\sqrt{٣}$

متسلسلة المساحات $٩\sqrt{٣} + \frac{٩}{٤}\sqrt{٣} + \frac{٩}{١٦}\sqrt{٣} + \cdots$

هندسية كون $\dfrac{\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}}{\frac{٩\sqrt{٣}}{١}} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٤} \times \frac{١}{٩\sqrt{٣}} = \frac{١}{٤}$ لا نهائية

كون $\frac{١}{٤} < ١$ وتقاربية

$$\therefore ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٩\sqrt{٣}}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٩\sqrt{٣}}{\frac{٣}{٤}}$$

$= ٩\sqrt{٣} \times \frac{٤}{٣} = ١٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(١٥ — ٥) متتاليات ومتسلسلات هامة في الرياضيات

«سنوردها بإيجاز شديد»

(١) المتتالية والمتسلسلة الحسابية الهندسية معاً G. and A. Sequece and Series

«المتتالية الحسابية الهندسية»

المتتالية التالية: ٧، ٧، ٧، ....، ٧

حدها الأول = أ = ٧

وهي متتالية حسابية كون ٧ — ٧ = ٧ — ٧ = صفر = د

أي أن اساسها د = صفر

وهي متتالية هندسية كون $\frac{٧}{٧} = \frac{٧}{٧} = ١ = ر$

أي ان أساسها ر = ١

فهي حسابية هندسية معاً.

حدها العام =

حـن = أ + (ن − ١) د = أ + (ن − ١) (صفر) = أ = ٧ كحسابية

= أرن − ١ = أ ١ن − ١ = أ (١) = أ = ٧ كهندسية

والمتسلسلة ٧ + ٧ + ٧ + ... + ٧

متسلسلة حسابية كون أساسها د = صفر

ومتسلسلة هندسية كون أساسها ر = ١

فهي متسلسلة حسابية هندسية.

مجموع ن منها كحسابية:

جـن = ن/٢ { ٢أ + (ن − ١) د } = { ٢أ + (ن − ١) (صفر) }

= ن/٢ { ٢أ } = ن أ

ومجموع ن منها كهندسية يؤخذ من رموز المجموع.

مجـ (ر = ١ إلى ن) أ = أ + أ + أ + ... + أ إلى ن مرة

= ن أ

⇦مثال: ما مجموع عشرة حدود من المتسلسلة ٧ + ٧ + ٧ + ... + ٧

أو أوجد مجـ (ر = ١ إلى ١٠) ٧ = ٧ + ٧ + ٧ + ... + ٧ إلى عشر مرات

= ١٠ (٧) = ٧٠ كهندسية

وكحسابية:

$\text{جـ}_{١٠} = ١٠\ (٧) = ٧٠$ كحسابية

تسمى أحياناً المتسلسلة الثانية (أي أن حدودها لا تتغير بالزيادة أو النقصان)

(٢) المتسلسلة التوافقية Harmonic Series

هي المتسلسلة اللانهائية التي كل حد من حدودها يعتبر مقلوباً لحدٍ في متسلسلة حسابية مناظرة لها.

ومثالها المتسلسلة التي حدها العام $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}}$

حيث $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{١}{\text{ن}} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \cdots\cdots + \frac{١}{\text{ن}}$

وبما أن حدها العام $\frac{١}{\text{ن}}$ فإن $\text{ح}_{٧} = \frac{١}{٧}$ وهكذا

ولا يمكن إيجاد جميع حدودها مطلقاً.

⇦مثال: أكتب المتسلسلة التوافقية المناظرة للمتسلسلة الحسابية

$٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + \cdots\cdots$

المتسلسلة التوافقية: $\frac{١}{٥} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٥} + \frac{١}{٢٠} + \cdots\cdots$

حدها العام: بما ان البسط ١ وهو ثابت فإن الحد العام للمقام:

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\ \text{د} = ٥ + (\text{ن} - ١)\ (٥) = ٥ + ٥\text{ن} - ٥$

$= ٥\text{ن}$

فالحد العام للمتسلسلة $= \frac{١}{\text{ح}_{\text{ن}}\ \text{للمقام}} = \frac{١}{٥\text{ن}}$

(٣) متتالية الأعداد المثلثاتية Triangular Numbers Seqence

إنها متتالية حدودها منتقاه من مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بترتيب مُعين بحيث تشكل بتمثيلها على هيئة نقط مثلثات كما يلي:

العدد الأول = ١ · نقطة واحدة

العدد الثاني = ١ + ٢ = ٣ ∴ ثلاث نقط

العدد الثالث = ١ + ٢ + ٣ = ٦ ست نقط

العدد الرابع = ١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠ عشر نقط

وهكذا

هذا ويمكن كتابتها على الصورة : $\frac{١ \times ٢}{٢}$ ، $\frac{٢ \times ٣}{٢}$ ، $\frac{٣ \times ٤}{٢}$ ، $\frac{٤ \times ٥}{٢}$ ،

وهكذا

وكمتتالية فإن حدها العام $ح_{ن} = \frac{ن (ن + ١)}{٢}$

للتحقق فإن $ح_{٤} = \frac{٤ (٤ + ١)}{٢} = \frac{٤ (٥)}{٢} = ١٠$ كما هو واضح أعلاه

لذلك فمتتالية الأعداد المثلثاتية هي: ١، ٣، ٦، ١٠، ...، $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$

(٤) متتالية المربعات Squares Seqnence

إنها متتالية حدودها منتقاه من مجموعة الأعداد الطبيعية ط* بترتيب خاص يتمحور حول جمع الأعداد الفردية ومن بداية المجموعة ط* هكذا:

$ح_{١} = ١ = (١)^{٢}$ حيث ١ عدد حقيقي

$ح_{٢} = ١ + ٣ = ٤ = (٢)^{٢}$ حيث ٢ عدد حقيقي

$ح_{٣} = ١ + ٣ + ٥ = ٩ = (٣)^{٢}$ حيث ٣ عدد حقيقي

$ح_٤ = ١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦ = (٤)^٢$ حيث ٤ عدد حقيقي

$ح_٥ = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ = (٥)^٢$ حيث ٥ عدد حقيقي

وحدها العام $ح_ن = ن^٢$ حيث ن عدد الحدود، ن ∈ ط*

فالمتتالية هي: ١، ٤، ٩، ....، $ن^٢$

وحدها العاشر =

$ح_{١٠} = (١٠)^٢ = ١٠٠$ وهكذا.

(٥) المتسلسلات المتناوبة Alternanting Series

إنها متسلسلات لا نهائية ذات حدود ثابتة فيها تتناوب الحدود الإشارتين الموجبة والسالبة وعلى التوالي حد موجب ويليها حد سالب وهكذا. ويعُبر عنها بإحدى الصورتين:

$$\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^ن = -أ_١ + أ_٢ - أ_٣ + أ_٤ - \cdots + (-١)^ن أ_ن + \cdots$$

⇦مثال: $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥(-١)^ن = ٥(-١)^١ + ٥(-١)^٢ + ٥(-١)^٣ + \cdots$

$= -٥ + ٥ - ٥ + \cdots$ بدأت المتسلسلة بالحد السالب

وكذلك $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥(-١)^{ن-١} = ٥(-١)^{صفر} + ٥(-١)^١ + ٥(-١)^٢ + \cdots$

$= ٥ - ٥ + ٥ - \cdots$ بدأت المتسلسلة بالحد الموجب

وبإيجاز شديد يظهر في الحدود العدد $(-١)^ن$ أو العدد $(-١)^{ن-١}$ لتكسب المتتالية صفة التناوب، ن ∈ ط*

(٦) متسلسلة القوى Power Series

وتسمى المتسلسلة الأُسية أيضاً

وهي المتسلسلة اللانهائية وذات الحدود المتغيرة والتي تظهر المتغير س ^ن^ في كل حدٍ من حدودها كما في الصورة:

$$\sum_{ن = صفر}^{\infty} أ_ن س^ن = أ_. س^. + أ_١ س^١ + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن$$

(١٥ - ٦) أمثلة محلولة على المتتاليات والمتسلسلات

⇦مثال ١: صنف المتتاليات والمتسلسلات التالية إلى:

{حسابية، هندسية، حسابية وهندسية، لا حسابية ولا هندسية}

(١) المتتالية ١، ٣، ٥، ....

الجواب: حسابية لأن الفرق بين $ح_{٢}$ و $ح_{١}$ يساوي الفرق بين $ح_{٣}$ و $ح_{٢}$ هكذا

$ح_{٢} - ح_{١} = ح_{٣} - ح_{٢}$ كون ٣ − ١ = ٥ − ٣ = ٢ أساسها.

(٢) المتسلسلة ٢٠ + ١٠ + ٥ + ...

الجواب: هندسية لأن النسبة بين $ح_{٢}$ و $ح_{١}$ يساوي الفرق بين $ح_{٣}$ و $ح_{٢}$ هكذا

$$\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$$ كون $\frac{١٠}{٢٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ أساسها.

(٣) المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{ن} \sqrt{ر}$

الجواب: بعد فك رمز لمجموع تصبح المتسلسلة

$$\sqrt{١} + \sqrt{٢} + \sqrt{٣} + \cdots + \sqrt{ن}$$

لا حسابية ولا هندسية كون $ح_{٢} - ح_{١} \neq ح_{٣} - ح_{٢}$ الفرق غير ثابت

وكون $\frac{ح_{٢}}{ح_{١}} \neq \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$ النسبة غير ثابتة

(٤) المتتالية التي حدها العام $ح_{ن} = ٧$

أي المتتالية: ٧، ٧، ٧، ....، ٧

حسابية وهندسية الآن:

$ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢$ كون ٧ − ٧ = ٧ − ٧ = صفر أساسها

ولأن $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢}$ كون $\frac{٧}{٧} = \frac{٧}{٧}$ = ١ أساسها

فهي حسابية أساسها = صفر

وهندسية أساسها = ١

⇦مثال ٢: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول = ٦ وأساسها = ٤

الحل:

نجد $ح_ن$ لها:

$ح_ن$ = أ + (ن − ١) ء = ٦ + (ن − ١) (٤)

= ٦ + ٤ن − ٤

= ٤ن − ٢

ثم نجد الحدود لتكوين المتتالية هكذا:

$ح_١$ = ٤ × ١ + ٢ = ٤ + ٢ = كما هومُعطى

$ح_٢$ = ٤ × ٢ + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠

$ح_٣$ = ٤ × ٣ + ٢ = ١٢ + ٢ = ١٤

$ح_٤$ = ٤ × ٤ + ٢ = ١٦ + ٢ = ١٨

$ح_٥ = ٤ \times ٥ + ٢ = ٢٠ + ٢ = ٢٢$

∴ المتتالية: ٦، ١٠، ١٤، ١٨، ٢٢، ...، (٤ ن + ٢)

⇦مثال ٣: أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتسلسلة

$٥١٢ + ٢٥٦ + ١٢٨ + \cdots$

الحل: حدها الأول = ٥١٢

أساسها ر $= \frac{٢٥٦}{٥١٢} = \frac{١٢٨}{٢٥٦} = \frac{١}{٢}$

بما أن $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ، ر < ١

$$∴ جـ_ن = \frac{٥١٢ \left(١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٨\right)}{١ - \frac{١}{٢}} ، \frac{٥١٢ \left(١ - \frac{١}{٢٥٦}\right)}{\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{٥١٢ \left(\frac{٢٥٥}{٢٥٦}\right)}{\frac{١}{٢}}$$

$$= (٢)(٢٥٥)(٢) = (٤)(٢٥٥) = ١٠٢٠$$

⇦مثال ٤: أوجد مجموع المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢٥} + \frac{١}{١٢٥} + \cdots$$

بما أن المتسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية

وأن أساسها: ر $= \frac{\frac{١}{٥}}{١} = \frac{\frac{١}{٢٥}}{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{٥}$

$∴ جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

$$\therefore \; جـ_{\infty} = \frac{١}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٥}{٤} = ١\frac{١}{٤}$$

⇦مثال ٥: بين أن لوغاريتمات حدود متتالية هندسية للأساس (١٠) تُكوِّن متتالية حسابية:

البيان: ليكن لدينا المتتالية الهندسية أ، أر، أر^{٢}، .... أر$^{ن-١}$

أساسها ر وحدها الأول أ.

والآن اللوغاريتمات للأساس (١٠) لحدودها: هي

لو أ، لو أ ر، لو أ ر^{٢}، .... لو أ ر$^{ن-١}$

وحتى تكون هذه الحدود متتالية حسابية نجد أساسها (ء)

لو أ ر - لو أ $\overset{؟}{=}$ لو أ ر^{٢} - لو أ ر

الجواب كما يلي:

الطرف الأيمن: لو أ ر - لو أ = لو أ + لو ر - لو أ (من قوانين اللوغاريتمات)

= لو ر

الطرف الأيسر: لو أ ر^{٢} - لو أ ر = ٢ لو ر - لو ر^{٢} - لو أ - لو ر

= لو ر^{٢} - لو ر = ٢ لو ر - لو ر = لو ر الطرف الأيمن

∴ الأساس ء = لو ر

وحدها الأول: لو أ + (ن - ١) لو ر

وحدها العام: ح$_{ن}$ + (ن - ١) (ء)

فهي حسابية الأساس

$=$ لو أ + لو $ر^{ن - ١}$

$=$ لو $أر^{ن - ١}$

وهو المطلوب بيانه

⇦مثال ٦: إذا كان الحد العاشر من متسلسلة حسابية هو ٤٣ وكانت النسبة بين حديها الثالث والخامس هي ٤ : ٩، أوجد الحد العام.

بما أن $ح_ن$ = أ + (ن - ١) (ى)

فإن $ح_{١٠}$ = أ + (١٠ - ١) ى = أ + ٩ ى = ٤٣ ①

$\frac{ح_٣}{ح_٥} = \frac{أ + (٣ - ١) ى}{أ + (٥ - ١) ى} = \frac{أ + ٢ ى}{أ + ٤ ى} = \frac{٤}{٩}$ ② وبالضرب التبادلي

٩ أ + ١٨ ى = ٤ أ + ١٦ ى

لحذف ى

والحل بالحذف

٩ (٥أ + ٢ ى = صفر ②

- ٢ (أ + ٩ ى = ٤٣ ①

والحل بالحذف

٤٥ أ + ١٨ ى = صفر ②

- ٢ أ - ١٨ ى = - ٨٦ ①

٤٣ أ = - ٨٦

أ = $\frac{-٨٦}{٤٣}$ = - ٢ حدها الأول

لكن أ + ٩ ء = ٤٣ (١)

∴ - ٢ + ٩ ء = ٤٣

٩ ء = ٤٥

ء = ٥ أساسها

∴ $ح_ن$ = (- ٢) + (ن - ١) (٥) = - ٢ + ٥ ن - ٥

∴ $ح_ن$ = ٥ ن - ٧

⇦مثال ٧: ثلاثة أعداد حقيقية تكون متتالية هندسية مجموعها ١١٢، فإذا جمعنا إلى العدد الأول ٨ والعدد الثاني ٨ وطرحنا من العدد الثالث ٨، تصبح هذه الأعداد بعد التغيير متتالية حسابية، فما هي هذه الأعداد ؟

نفرض أن العدد الأول = أ

يكون العدد الثاني = أ ر

ويكون العدد الثاني = أ $ر^٢$

كونها متتالية هندسية

∴ أ + أ ر + أ $ر^٢$ = ١١٢ (١)

وبعد الجمع، العدد الأول يصبح أ + ٨

والعدد الثاني يصبح أ ر + ٨

وبعد الطرح: العدد الثالث يصبح: أ $ر^٢$ - ٨

∴ أ + ٨، أ ر + ٨، أ $ر^٢$ - ٨ متتالية حسابية

أساسها: (أ ر + ٨) – (أ + ٨) = (أ $ر^٢$ - ٨) – (أ ر + ٨)

∴ أ ر + ٨ – أ – ٨ = أ ر^{٢} – ٨ – أ ر – ٨

∴ أ ر^{٢} – أ ر – أ ر + أ = ١٦

∴ أ ر^{٢} – ٢ أ ر + أ = ١٦ (٢)

وبحل المعادلتين ١ ، ٢ بالحذف بعد التحليل هكذا :

أ (١ – ر + ر^{٢}) = ١١٢

ومنها أ = ١١٢ / (١ – ر + ر^{٢}) ← (١)

وكذلك أ (١ – ٢ ر + ر^{٢}) = ١٦

ومنها أ = ١٦ / (١ – ٢ ر + ر^{٢}) ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن

١١٢ / (١ – ر + ر^{٢}) = ١٦ / (١ – ٢ ر + ر^{٢}) وبالضرب التبادلي

١١٢ (١ – ٢ ر + ر^{٢}) = ١٦ (١ – ر + ر^{٢})

∴ ٧ – ١٤ ر + ٧ ر^{٢} = ١ + ر + ر^{٢}

∴ ٧ ر^{٢} – ر^{٢} – ١٤ ر – ر + ٧ – ١ = صفر

٦ ر^{٢} – ٥ ر + ٦ = صفر
―――――――
٣

٢ ر^{٢} – ٥ ر + ٢ = صفر

(٢ ر – ١) (ر – ٢) = صفر

∴ ر = $\frac{1}{2}$ ، ٢

ومنها = $\frac{112}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$ = $\frac{112}{\frac{7}{4}}$ = ١١٢ × $\frac{4}{7}$ = ٦٤ العدد الأول

العدد الثاني = أ ر = ٦٤ × $\frac{1}{2}$ = ٣٢

العدد الثالث = أ ر^{2} = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ = ١٦

فالأعداد ٦٤، ٣٢، ١٦

وعندما ر = ٢

∴ أ = $\frac{112}{4 + 2 + 1}$ = $\frac{112}{7}$ = ١٦

العدد الثاني = أ ر = ١٦ × ٢ = ٣٢

العدد الثالث = أ ر^{2} = ١٦ × ٢ × ٢ = ٦٤

فالأعداد ١٦، ٣٢، ٦٤

∴ الأعداد الثلاثة هي ٦٤، ٣٢، ١٦ أو العكس ١٦، ٣٢، ٦٤

⇦مثال ٨: عددان حقيقيان موجبان وسطهما الحسابي = ٥ ووسطهما الهندسي = ٣، فما العددان ؟

العددان أ، ب

∴ $\frac{أ + ب}{2}$ = ٥ ⟵(بالضرب التبادلي) أ + ب = ١٠ (١)

وكذلك $\sqrt{أ ب}$ = ٣ ⟵(بالتربيع) أ ب = ٩ (٢)

وبحل المعادلتين بالتعويض هكذا.

بما أن أ + ب = ١٠ ⟵ أ = ١٠ − ب

نعوض في المعادلة التالية:

(١٠ − ب) (ب) = ٩

∴ ١٠ ب − ب^{٢} = ٩

− ١ (∴ − ب^{٢} + ١٠ ب − ٩ = صفر)

ب^{٢} − ١٠ ب + ٩ = صفر

(ب − ١) (ب − ٩) = صفر

∴ ب = ١ ، ٩ العدد الثاني

لكن أ = ١٠ − ب

∴ أ = ١٠ − ١ = ٩

وكذلك ١٠ − ٩ = ١

فالعددان ١ ، ٩

⇦مثال ٩: أكتب الحدود الخمسة الأولى لكلٍ من المتتاليات والمتسلسلات التالية:

(١) المتتالية التي حدها العام: ح$_{ن}$ = { ٢^{ن} ، ن عدد فردي ؛ ٣^{ن} ، ن عدد زوجي }

الجواب:

ح$_{١}$ = ٢^{١} = ٢ كون «١» عدد فردي

ح$_{٢}$ = ٣^{٢} = ٩ كون «٢» عدد زوجي

$ح_{٣} = ٢^{٣} = ٨$ كون «٣» عدد فردي

$ح_{٤} = ٣^{٤} = ٨١$ كون «٤» عدد زوجي

$ح_{٥} = ٢^{٥} = ٣٢$ كون «٥» عدد فردي

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتتالية هي: ٢، ٩، ٨، ٨١، ٣٢، ....

(٢) المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن - ١}{ن + ١}$

$ح_{١} = \frac{١ - ١}{١ + ٣} = \frac{صفر}{٤} = صفر$

$ح_{٢} = \frac{٢ - ١}{٢ + ٣} = \frac{١}{٥}$

$ح_{٣} = \frac{٣ - ١}{٣ + ٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$ح_{٤} = \frac{٤ - ١}{٤ + ٣} = \frac{٣}{٧}$

$ح_{٥} = \frac{٥ - ١}{٥ + ٣} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة هي:

$صفر + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٣} + \frac{٣}{٧} + \frac{١}{٢} + \cdots$

(٢) المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ن}\right)^{ن - ١}$

$ح_{١} = \left(\frac{١}{١}\right)^{١ - ١} = (١)^{٠} = ١$

$ح_{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢ - ١} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} = \frac{١}{٢}$

$$ح_٣ = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣-١} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$$

$$ح_٤ = \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤-١} = \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣} = \frac{١}{٦٤}$$

$$ح_٥ = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٥-١} = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٤} = \frac{١}{٦٢٥}$$

∴ الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة هي:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٦٤} + \frac{١}{٦٢٥} + \cdots$$

⇦مثال ١٠: أكتب الكسر العشري الدوري $٠,٢\overline{٦}$ بصورة عدد نسبي (كسر عادي)؟

بما أن $٠,٢\overline{٦} = ٠,٢٦٦٦٦$

∴ $٠,٢\overline{٦} = ٠,٢ + (٠,٠٦ = ٠,٠٠٦ + ٠,٠٠٠٦ ، \cdots)$

$= ٠,٢ +$ (مجموع المتسلسلة $٠,٠٦ = ٠,٠٠٦ + ٠,٠٠٠٦ ، \cdots$)

وبما أن المتسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أساسها ر

$$= \frac{٠,٠٠٦}{٠,٠٦} = \frac{٠,٠٠٠٦}{٠,٠٠٦} = \frac{١}{١٠} = ٠,١$$

∴ $٠,٢\overline{٦} = ٠,٢ + \frac{أ}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

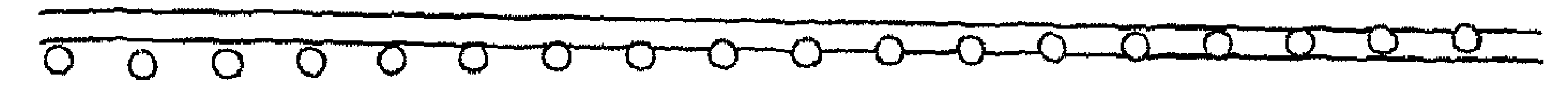
$$= ٠,٢ + \frac{٠,٠٦}{١ - ٠,١} = ٠,٢ + \frac{٠,٠٦}{٠,٩}$$

$$= \frac{٢}{١٠} + \frac{٦}{٩٠} = \frac{١٨ + ٦}{٩٠} = \frac{٢٤}{٩٠} = \frac{٤}{١٥}$$

∴ $٠,٢\overline{٦} = \frac{٤}{١٥}$ كعدد نسبي أو ككسر عادي.

⇦مثال ١١: أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام

$ح_ن = ن^٢ + ن$ ومثلها بيانياً بصورة جزئية.



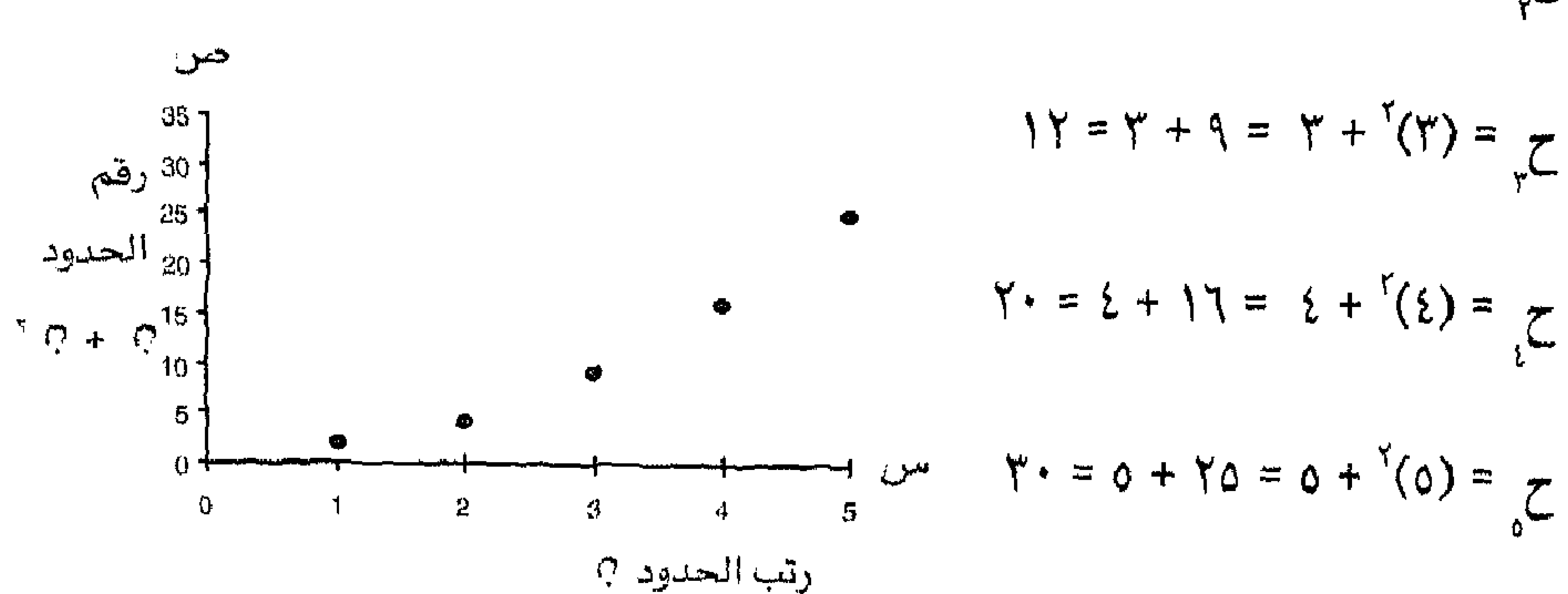
$ح_١ = (١)^٢ + ١ = ١ + ١ = ٢$

$ح_٢ = (٢)^٢ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦$

$ح_٣ = (٣)^٢ + ٣ = ٩ + ٣ = ١٢$

$ح_٤ = (٤)^٢ + ٤ = ١٦ + ٤ = ٢٠$

$ح_٥ = (٥)^٢ + ٥ = ٢٥ + ٥ = ٣٠$



أما التمثيل البياني لهذه الحدود هكذا

⇦مثال ١٢ : أدخل ٥ أوساط حسابية بين العددين ٢٩ ، ٥

بعد إدخال الأوساط الحسابية يصبح العدد ٢٩ هو الأول

$\therefore ح_١ = ٢٩ = أ$ ⟵ (١)

والعدد ٥ هو السابع

$\therefore ح_٧ = ٥ = أ + ٦ء$ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore ٢٩ + ٦ء = ٥$

$-٢٩ \qquad -٢٩$

$٦ء = -٢٤$

$ء = -٤$

والآن أصبحت الأوساط الحسابية مع العددين ٢٩ ، ٥ سبعة حدود من متتالية

حسابية هي:

٢٩، الأوساط الحسابية الخمسة، ٥

الوسط الأول = الحد الثاني = $ح_٢$ = ٢٩ + (- ٤) = ٢٥

الوسط الثاني = الحد الثالث = $ح_٣$ = ٢٥ + (- ٤) = ٢١

الوسط الثالث = الحد الرابع = $ح_٤$ = ٢١ + (- ٤) = ١٧

الوسط الرابع = الحد الخامس = $ح_٥$ = ١٧ + (- ٤) = ١٣

الوسط الخامس = الحد السادس = $ح_٦$ = ١٣ + (- ٤) = ٩

فالأوساط الحسابية هي

٢٥، ٢١، ١٧، ١٣، ٩

وتصبح المتتالية الحسابية:

٢٩، ٢٥، ٢١، ١٧، ١٣، ٩، ٥

⇦مثال ١٣: أوجد مجموع

(١) الأعداد الخمسين الأولى الفردية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

(٢) الأعداد الخمسين الأولى الزوجية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

استنتج مجموعة المائة عدد الأول من مجموعة الأعداد الطبيعية.

الحل: أي المطلوب الأول:

$جـ_{٥٠}$ من المتسلسلة ١ + ٣ + ٥ + ... إلى خمسين حداً

المتسلسلة ١ + ٣ + ٥ + ··· حسابية أساسها ء = ٣ — ١ = ٥ — ٣ = ٢

بما أن جـ $_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ {٢أ + (ن − ١) ء}

فإن جـ $_{٥٠}$ = $\frac{٥٠}{٢}$ {٢ + (٥٠ — ١) (٢) }

= $\frac{٥٠}{٢}$ {٢ + (٤٩) (٢) } = ٢٥ { ٢ + ٩٨ }

= ٢٥ {١٠٠} = ٢٥٠٠

والمطلوب الثاني:

جـ $_{٥٠}$ من المتسلسلة ٢ + ٤ + ٦ + ··· إلى خمسين حداً

المتسلسلة ٢ + ٤ + ٦ + ··· حسابية أساسها ء = ٤ — ٢ = ٦ — ٤ = ٢

∴ جـ $_{٥٠}$ = $\frac{٥٠}{٢}$ {٢ × ٢ + (٥٠ — ١) (٢) }

= ٢٥ { ٤ + ٩٨ } = ٢٥ {١٠٢} = ٢٥٥٠

∴ مجموع المائة عدد الأولى من مجموعة الأعداد الحقيقية

ط* = {١، ٢، ٣، ٤، .... إلى مائة حداً}

أي إيجاد جـ $_{١٠٠}$ للمتسلسلة ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ··· إلى مائة حد

المتسلسلة ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ··· إلى مائة حد حسابية أساسهما ٢ — ١ = ٣ — ٢ = ١

جـ $_{١٠٠}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ {٢ × ١ + (١٠٠ — ١) (١) }

= ٥٠ { ٢ + ٩٩ } = ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠

وهذا يطابق تماماً جـ $_{٥٠}$ الفردية + جـ $_{٥٠}$ الزوجية

= ٢٥٠٠ + ٢٥٥٠ = ٥٠٥٠

⇦مثال ١٤ : ما عدد حدود المتتالية ١، - ٣، ٩، ٠٠٠، ٨١ المنتهية ؟

أولاً يجب معرفة نوعها أحسابية هي أم هندسية ؟

بما أن – ٣ – ١ ≠ ٩ – (- ٣) فهي غير حسابية

وبما أن $\frac{-٣}{١} = \frac{٩}{-٣}$ = - ٣ فهي هندسية أساسها ر = - ٣

ح~ن~ = أ ر^ن - ١^ = (١) (- ٣)^ن - ١^

والحد العام هو الحد الأخير في المتتالية

∴ (- ٣)^ن - ١^ = ٨١ أصبحت معادلة

نحلل ٨١ إلى عواملها الأولية - ٣ فقط

٨١	- ٣
- ٢٧	- ٣
٩	- ٣
- ٣	- ٣
١	

∴(- ٣)^ن - ١^ = (- ٣)^٤^

∴ ن - ١ = ٤

ن = ٥

فعدد حدودها ٥ فقط

⇦مثال ١٥ : خزان سعته ٢٧٠٠ لتر مملؤ بالماء تماماً، إذا أُفرغ منه كل يوم $\frac{١}{٣}$ الكمية الموجودة فيه فما كمية الماء الباقية فيه بعد نهاية اليوم الخامس.

في اليوم الأول ينقص $\frac{١}{٣}$ فيبقى به $\frac{٢}{٣}$ سعته من الماء

وفي اليوم الثاني يبقى فيه $\frac{٢}{٣}$ الكمية الباقية من اليوم الأول أو $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}$

= $(\frac{٢}{٣})^{٢}$ سعته من الماء

وهكذا حتى نهاية نهاية اليوم الخامس: $(\frac{٢}{٣})^{٥}$ × الكمية

= $(\frac{٢}{٣})^{٥} \times ٢٧٠٠$ لتراً

= $\frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣} \times ٢٧٠٠ = \frac{٣٢٠٠}{٩}$ = ٣٥٥,٥ لتراً

⇐مثال ١٦: إذا كان $\sqrt[٣]{س} = \sqrt[٥]{ص} = \sqrt[٧]{ع}$

بين أن الأعداد س، ص، ع متتالية هندسية يجب أن يكون

$\frac{ص}{س} = \frac{ع}{ص}$ أساسها المتتالية الهندسية

أي أن $ص^{٢} = س\,ع$ هذا المطلوب بيانه

نجد $\sqrt[٣]{س} = \sqrt[٧]{ع}$ بدلالة العدد ص هكذا

بمـا أن $(\sqrt[٣]{س} = \sqrt[٥]{ص}) \longleftarrow (س^{\frac{١}{٣}} = ص^{\frac{١}{٥}})^{٣}$ تحويـل الجـذور إلى

أسس نسبية ومنه $س = ص^{\frac{٣}{٥}}$ ——————— (١)

بمـا أن $(\sqrt[٧]{ع} = \sqrt[٥]{ص}) \longleftarrow (ع^{\frac{١}{٧}} = ص^{\frac{١}{٥}})^{٧}$ تحويـل الجـذور إلى

أسس نسبية ومنه $ع = ص^{\frac{٧}{٥}}$ ——————— (٢)

$\therefore س \times ع = ص^{\frac{٣}{٥}} \times ص^{\frac{٧}{٥}} = ص^{\frac{١٠}{٥}} = ص^{٢}$

$\therefore س\,ع = ص^{٢}$

$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ع}{ص}$

ومنها س، ص، ع تشكل متتالية هندسية

للتحقق من صحة الحل نأخذ المثال:

بما أن $\sqrt[٣]{٨} = \sqrt[٥]{٣٢} = \sqrt[٧]{١٢٨}$ = (٢) لجميع الجذور

فإن الأعداد ٨، ٣٢، ١٢٨ تشكل متتالية هندسية

لأن $\frac{٣٢}{٨} = \frac{١٢٨}{٣٢}$ = ٤ أساسها ر

$\frac{١٠ ر^٢ - ٢٥ ر + ١٠}{٥}$ = صفر

٢ $ر^٢$ - ٥ ر + ٢ = صفر

(٢ ر - ١) (ر - ٢) = صفر

ر = $\frac{١}{٢}$ ، ٢

ومنه أ = $\frac{١}{ر} = \frac{١٠}{\frac{١}{٢}}$ = ٢٠

أو أ = $\frac{١}{ر} = \frac{١٠}{٢}$ = ٥

فالأعداد هي: ٢٠، ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ ، ٢٠ × $(\frac{١}{٢})^٢$

أي ٢٠، ١٠، ٥

أو ٥، ١٠، ٢٠

⇦مثال ١٨ : أي من المتتاليات التالية حسابية ؟

(١) ١، ٤، ٩، ١٦، ....

غير حسابية لأن ٤ - ١ ≠ ٩ - ١٤

(٢) ٢، - ٢، ٢، - ٢، ....

ليست حسابية لأن -٢ - ٢ ≠ ٢ - (-٢)

(٣) ٣٢، صفر، - ٣، - ٦، ....

حسابية لأن صفر -٣ = -٣ - صفر = - ٦ - (- ٣) = -٣ أساسها.

⇦مثال ١٩: إذا كان مجموع المتسلسلة الهندسيية اللانهائية

١ + أ + أ^{٢} + ··· هو س

وكان مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

١ + ب + ب^{٢} + ··· هو ص

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

١ + أ ب + أ^{٢} ب^{٢} + ··· بدلالة س، ص

الحل:

من المتسلسلة الأولى: $جـ_{\infty} = \frac{١}{١ - أ} = س$ (مجموعها)

من المتسلسلة الثانية: $جـ_{\infty} = \frac{١}{١ - ب} = ص$ (=)

∴ $س = \frac{١}{١ - أ}$ بالضرب التبادلي

س − أس = ١

∴ س − ١ = أس

ومنها $أ = \frac{س - ١}{س}$

وكذلك $ص = \frac{١}{١ - ب}$ بالضرب التبادلي

ص − ب ص = ١

∴ ص − ١ = ب ص

ومنها $ب = \frac{ص - ١}{ص}$

والآن المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$١ + أ ب + أ^٢ ب^٢ + \cdots$ أساسها ء = أ ب

$$جـ_{\infty} = \frac{١}{١ - أب} = \frac{١}{١ - \left(\frac{س - ١}{س}\right)\left(\frac{ص - ١}{ص}\right)}$$

$$= \frac{١}{\frac{١}{١} - \frac{(س - ١)(ص - ١)}{س ص}} = \frac{١}{\frac{س ص - (س - ١)(ص - ١)}{س ص}}$$

$$= \frac{١}{\frac{س ص - \{(س - ١)(ص - ١)\}}{س ص}} = \frac{س ص}{س ص - (س ص - س - ص + ١)}$$

$$= \frac{س ص}{س ص - س ص + س + ص - ١} = \frac{س ص}{س + ص - ١}$$

وبدلالة س، ص

⇦مثال ٢٠: أيهما أفضل لشخصٍ أن يودع مبلغ ١٠٠٠ دينار بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤٪ ولمدة ٣ سنوات وتضاف الفائدة إلى الأصل كل ٦ شهور أم أن يودع المبلغ نفسه في نفس البنك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٤,٢٥٪ ولنفس المدة ولكن تضاف الفوائد إلى الأصل كل سنة ؟

$جـ_{مركبة} = م \left(١ + \frac{ع}{ك}\right)^{ن \times ك}$ حيث ك = ٢ مرة بالسنة

$\therefore جـ_{مركبة} = ١٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٤}{٢}\right)^{٣ \times ٢}$

$= ١٠٠٠ (١,٠٢)^٦$

$= (١٠٠٠) (١,٠٢)^٣ (١,٠٢)^٣$

$= ١٠٠٠ (١,٠٦١٢٠٨) (١,٠٦١٢٠٨)$

$= ١٠٠٠ (١,٠٦) (١,٠٦)$ بعد تقريب الجواب لأربعة منازل عشرية

= ١٠٠٠ (١,١٢٣٦) = ١١٢٣,٦ دينار تقريباً

وعندما تضاف الفوائد كل سنة تستخدم القانون

جـ $_{\text{مركبة}}$ = م (١+ ع)^{ن} = ١٠٠٠ (١,٠٤٢٥)^{٣}

= ١٠٠٠ (١,٠٤٢٥) (١,٠٤٢٥) (١,٠٤٢٥)

= ١٠٠٠ (١,٠٤) (١,٠٤) (١,٠٤) لأقرب ٦ منازل عشرية

= ١٠٠٠ (١,٠٤)^{٣}

= ١٠٠٠ (١,٤٨١٢٦٤) = ١٤٨١,٢ دينار تقريباً

والملاحظ أن الإيداع بالشرط الثاني أفضل كون جملته تصبح أكبر

لأن ١٤٨١,٢ > ١١٢٣,٦٣

(١٥ ـ ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) أكتب الحد العام لكل من المتسلسلات التالية مع أنها ليست حسابية ولا هندسية.

«١» ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ... $\{\text{ن}^{٢}\}$

«٢» ١ + ٢ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٣}$ + ٤ $\sqrt{٤}$ + ... $\{\text{ن}\sqrt{\text{ن}}\}$

«٣» ١ + $\frac{\sqrt[٤]{٢}}{٤}$ + $\frac{\sqrt[٤]{٣}}{٩}$ + $\frac{\sqrt[٤]{١٦}}{١٦}$ + ... $\left\{\frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{ن}}}{\text{ن}^{٢}}\right\}$

(٢) أوجد الحد العشرين للمتتالية

٣٨، ٣٦، ٣٤، .... {صفر}

(٣) أوجد مجموع أول ١٧ حد من المتسلسلة

$\frac{١}{٢}$ ٥، $\frac{٣}{٤}$ ٦، ٨، .... $\{٢٦٣\frac{١}{٢}\}$

(٤) متسلسلة حسابية محدودة، حدها الأول ٥ وحدها الأخير ٤٥ ومجموع حدودها ٤٠٠، ما أساسها وعدد حدودها ؟ $\{\frac{٢}{٣}٢، ١٦\}$

(٥) كون المتتالية الحسابية التي حدها السابع − ٣ وحدها الحادي والخمسين − ٣٥٥ {٤٥، ٣٧، ٢٩، ...}

(٦) أدخل ٢٠ وسطاً حسابياً بين العددين ٤، ٦٧

{٧، ١٠، ١٣، ...، ٦١، ٦٤}

(٧) كم حداً من بداية المتسلسلة يجب أخذه ليكون مجموع هذه الحدود ٧٢ ؟

{٤، ٩}

(٨) ما الحد الثامن للمتتالية $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، . . . . { $\frac{٧٢٩}{١٢٨}$ }

إرشاد : هندسية

(٩) أدخل ٤ أوساط هندسية بين العددين ١٦٠، ٥ {٨٠، ٤٠، ٢٠، ١٠}

(١٠) أوجد مجموع أول ٩ حدود من المتسلسلة ٨١، ٥٤، ٣٦

{ $٢٣٦ \frac{٥٥}{٨١}$ } هندسية

(١١) حول الكسر الدوري $٠,٤\overline{٢٣}$ إلى الصورة النسبية { $\frac{٤١٩}{٩٩٠}$ }

(١٢) كوِّن المتسلسلة الهندسية اللانهائية (التقاربية) التي مجموع حديها الأول والثاني = $\frac{٨}{٣}$ ومجموعها إلى مالا نهاية = $\frac{٢٥}{٦}$

(١٣) إذا علمت أن المتتالية ٢ ، ٤ ، ٨، . . . ، $٢^{ن}$ هي متتالية هندسية فما نوع المتتالية التالية $(٢)^٢$، $(٤)^٢$، $(٨)^٢$، . . . $(٢^{ن})^٢$ {هندسية}

(١٤) أكتب المتسلسلات التالية باستخدام رمز المجموع $\sum$

«١» ٢ + ٤ + ٦ + . . . { $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢ن$ }

«٢» $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + . . .$ { $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٣$ }

(١٥) أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة $\sum_{ر=1}^{ن} \frac{ر(ر+1)(2ر-1)}{6}$

(١٦) متسلسلة حسابية محدودة حدها الأول = ٧ وحدها الأخير = ٥٥ ومجموع حدودها جميعاً = ٤٠٣ فما عدد حدودها ؟ {١٣ حداً}

(١٧) أكتب الحد العام لكل من المتتاليات:

«١» لو٢، لو٤، لو١٦، . . . {$٢^{ن-١}$ لو٢}

إرشاد: هندسية وأساسها ٢

«٢» $\frac{1}{س}$ ، $\frac{س+2}{2س}$ ، $\frac{2س+2}{2س}$ ، . . . ، س ≠ صفر

{$\frac{1}{س} + ن\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$}

«٣» ١، ٨، ٢٧، . . . {$ن^3$}

إرشاد: لا حسابية ولا هندسية

(١٨) أدخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين ٤، ٦٤ {٨، ١٦، ٣٢}

(١٩) متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث = ١٢ فما مقدار حدها الثاني {٦}

(٢٠) متسلسلة هندسية حدها الأول ٣٢ وحدها السادس ٢٤٣ أوجد حدها العام

{$٣٢ (\frac{3}{2})^{ن-1}$}

(٢١) متسلسلة حسابية منتهية حدها الأول - ٣ وحدها الأخير ٢٥ ومجموعها ٥٦١ ما أساسها وعدد حدودها ؟ {$\frac{14}{25}$ ، ٥١}

(٢٢) أكتب العدد الدوري $\overline{٠٫٢٣}$ بصورة عدد نسبي على الشكل $\frac{أ}{ب}$ $\left\{ \frac{٢٣}{٩٩} \right\}$

(٢٣) ما قيمة كل من أ ، ر إذا كان

$$أ + أ ر + أ ر^٢ + \cdots = \frac{٢}{٣}$$

$$أ - أ ر + أ ر^٢ - \cdots = \frac{٣}{٤}$$

حيث $|ر| < ١$ $\left\{ \frac{١٢}{١٧} ، - \frac{١}{١٧} \right\}$

(٢٤) أكتب المتسلسلة - ١ + ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٢٣ باستخدام رمز المجموع $\sum$

إرشاد: أوجد حدها العام أولاً $\left\{ \sum_{ن=١}^{٩} (٣ ن - ٤) \right\}$

(٢٥) إذا كانت أ + أ ر + أ $ر^٢$ + ... متتالية هندسية لكل أ ، ر أعداد حقيقية بيِّن أن $لو_هـ$ أ ، $لو_هـ$ أ ر ، $لو_هـ$ أ $ر^٢$ ، ... متتالية حسابية وأوجد أساسها

{$لو_هـ$ ر}

(٢٦) أوجد عددين طبيعيين الفرق بينهما = ٣٢ ويزيد وسطها الحسابي عن وسطها الهندسي بمقدار ٢ {٨١، ٤٩}

(٢٧) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات التي حدها العام:

«١» $ح_ن = \frac{ن^٢ - ٤ ن + ١}{٣ ن^٢ + ٥}$

«٢» $ح_ن = \frac{ن (ن - ١)}{(ن + ١)(ن + ٢)(ن + ٣)}$

«٣» $ح_ن = (٣^ن + ٥^ن)^{\frac{١}{ن}}$

«٤» $ح_ن = ن - \sqrt{(ن + ١)(ن + ٢)}$

(٢٨) أكتب العدد ٠٫١٢ ١٢ ١٢ ١٢ ··· على صورة عدد نسبي { $\frac{١٢}{٩٩}$ }

(٢٩) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتسلسلات

«١» $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢^ر$

«٢» $\sum_{ن=١}^{\infty} (٣ - \frac{١}{ن})$

(٣٠) كم عدد حدود المتسلسلة — ٥ — ٢ + ١ + ··· + ٢٢ { ١٠ }

(٣١) أوجد مجموع جميع حدود المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{١٠} (٣ ن + ١)$ { ١٧٥ }

(٣٢) ما النسبة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي للعددين ٦٤، ١٩٦ ؟

{ ٦٥:٥٦ }

(٣٣) كم عدد حدود المتتالية ١، - ٣، ٩، . . . ، ٨١ ؟ { ٥ }

(٣٤) أوجد مجموع المتسلسلة ١٠٠ — ٢٠ + ٤ — ··· { $\frac{٥٠٠}{٦}$ }

(٣٥) عمل شخص لدى شركة مقابل راتب سنوي مقداره ٤٢٠٠ دينار وزيادة سنوية مقدارها ٣٠٠ دينار.

احسب مجموع ما تقاضاه هذا الشخص من الشركة خلال ٥ سنوات ؟

{ ٢٤٠٠٠ }

(٣٦) إذا كان دخل سنان السنوي ١٠٠٠ دينار ويتزايد بمقدار ١٥٠ دينار سنوياً وكان يدخر منه ما نسبته ٨٪.

احسب مجموع مدخراته في نهاية ٢٠ سنة { ٣٨٨٠ دينار }

إرشاد: المدخرات تمثل مجموع متسلسلة حسابية

(٣٧) خمسة أعداد حقيقية تشكل متتالية حسابية مجموعها يساوي − ٢٠ ومجموع مربعاتها يساوي ١٧٠ فما هذه الأعداد ؟

{ − ١٠، − ٧، − ٤، − ١، ٢ أو العكس }

(٣٨) أيهما أكبر مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية أم مجموع الأعداد الطبيعية الفردية المحددة بالفترة (١٠٠، ٢٠٠) ؟

(٣٩) ما ترتيب الحد الذي قيمته $\frac{١}{٤٨٦}$ في المتتالية الهندسية

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٨}$ ، .... {السادس}

(٤٠) إذا كان الوسط الحسابي لعددين حقيقيين هو ٥ وكان الوسط الهندسي لهما هو ٤ فما العددان ؟ {٢، ٨ أو العكس}

(٤١) ثلاثة أعداد حقيقية تشكل متتالية هندسية مجموعها يساوي ١٤، وإذا أُنقص العدد الثالث بمقدار ٢ تحولت المتتالية إلى حسابية، فما هي هذه الأعداد ؟

{٢، ٤، ٨ أو العكس}

(٤٢) إذا كانت النسبة بين مجموع الحدود العشرة الأولى من متسلسلة حسابية ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها كنسبة ١٣ : ٤ فما العلاقة بين أساس المتتالية (ء) وحدها الأول (أ) $\{ ء = \frac{١}{٢} أ \}$

(٤٣) يُراد حفر بئر ارتوازي عمقه ١٥٠ متراً، فإذا علمت أن تكلفة حفر المتر الأول = ٦٠ دينار وتكلفة حفر المتر الثاني = ٧٠ دينار وتكلفة حفر المتر الثالث = ٨٠ دينار وهكذا. ما تكلفة حفر البئر كاملاً ؟

(٤٤) عبِّر عن العدد ٠,٢٣٤ بالصورة $\frac{أ}{ب}$ كعدد نسبي $\{ \frac{١١٦}{٤٩٥} \}$

(٤٥) أكتب الحد العام للمتتالية

٢، $(١ \frac{١}{٢})^٢$، $(١ \frac{١}{٣})^٣$، $(١ \frac{١}{٤})^٤$، ... $\{ (١ + \frac{١}{ن})^ن \}$

إرشاد : أكتب العدد الأول ٢ = $(١ \frac{١}{١})^١$ إن جاز التعبير

والمتسلسلة ١ + ٨ + ٢٧ + ... $\{ ح_ن = ن^٣ \}$

والمتتالية ٢، ٤، ٦، ...

والمتسلسلة $\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} + ...$

والمتتالية ٢، ٤، ٨، ...

(٤٦) ما رتبة الحد الذي قيمته ٦ في المتتالية ١,٥، ١,٨، ٢,١، ... $\{١٦\}$

(٤٧) أيٌّ من المتتاليات الآتية حسابية وما أساسها إن كانت كذلك ؟

«١» ٣٣، ٢٩، ٢٥، ...

«٢» ٢، ٤، ٨، ...

«٣» ٢، $\frac{٧}{٤}$، $\frac{٣}{٢}$، ...

«٤» ١، -٦، -١٣، ...

(٤٨) رُتبت مقاعد مسرح في ٣٠ صفاً هكذا، في الأول وضع ٣٢ مقعداً وفي الثاني وضع ٣٥ مقعداً وفي الثالث وضع ٣٨ مقعد، ما عدد مقاعد الصف الأخير.

(٤٩) أوجد مجموع المتسلسلة ٣ + ٨ + ١٣ + ... + ٩٨ {١٠١٠}

ومجموع المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{٢٥}$ (٣ ن + ١)

(٥٠) ما عدد الحدود التي يجب أن تؤخذ من المتسلسلة ٢٥ + ٢١ + ١٧ + ... ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها يساوي -١٤ ؟

(٥١) ما عدد حدود المتسلسلة ١٦ + ٨ + ٤ + ... + $\frac{١}{٤}$ { $\frac{١}{٤}$ }

(٥٢) اشترت سعاد سيارة بمبلغ ١٥٠٠٠ دينار فإذا كانت قيمتها تنقص كل سنة بمعدل ١٠٪ من قيمتها في السنة السابقة، ما قيمة السيارة في نهاية السنة العاشرة ؟

(٥٣) متتالية هندسية حدها الثالث يساوي ٦٤ وحدها السابع يساوي $\frac{١}{٤}$ ، فما حدها الأول ؟

(٥٤) أوجد مجموع المتسلسلة ١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ...

(٥٥) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم نُصفت أضلاعه ووصلت نقط التنصيف فشكلت مربعاً آخر ثم نصفت أضلاع المربع الجديد ووصلت فشكلت مربعاً آخر وهكذا كما في الشكل.

احسب مجموع مساحات المربعات الناتجة إلى مالانهاية

(٥٦) إذا كانت ٤ ، س، ١٦، . . . متتالية هندسية

وكانت ٤ ، ص، ١٦، . . . متتالية حسابية

ما النسبة بين قيمتي المتغيرين س، ص {٤ : ٥}

(٥٧) أكتب الحد العام للمتتالية

١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$ ، ٠ ، $\sqrt{٥}$ ، . . . {ح$_{ن}$ = { $\sqrt{ن}$ ، ن عدد طبيعي فردي ؛ صفر ، عدد طبيعي زوجي }

(٥٨) ما عدد الأعداد الطبيعية الواقعة بين العددين الطبيعيين ١٠٠ ، ٥٠٠ والتي كل منها يقبل القسمة على ١١ ؟ {٣٦}

(٥٩) أوجد مجموع المتسلسلة $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{٦}$ + $\frac{٧}{٦}$ + . . . + $\frac{٤١}{٦}$

إرشاد : حسابية

(٦٠) تتكون متسلسلة من ١٠ حدود مجموع الخمسة الأولى منها يساوي ٧ ومجموع الخمسة الثانية (الأخيرة) منها يساوي ١٢ ، أكتب هذه المتسلسلة بذكر جميع حدودها .

إرشاد: مجموع العشرة حدود الأولى منها = ٧ + ١٢ = ١٩

(٦١) إذا كان الوسط الحسابي للعددين ١١ص، - ١٣ص هو - ٧ فما قيمة ص

{٧}

(٦٢) متسلسلة هندسية منتهية، حدها الأول = $\frac{١}{٣٢}$ وأساسها = $\frac{١}{٢}$ ومجموعها $\frac{٢٥٥}{٣٢}$ أكتب الحدود الخمسة الأولى منها.

(٦٣) ما قيمة س لتشكل الأعداد س − ٤ ، س + $\frac{٣}{٢}$ ، س + ١٨ متتالية هندسية.

(٦٤) إذا كانت الأعداد أ ، ب ، جـ تكون متتالية حسابية ، وكانت الأعداد أ ، ب − أ ، جـ − أ تكون متتالية هندسية ، بين أن أ = $\frac{١}{٣}$ ب = $\frac{١}{٥}$ جـ

(٦٥) متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الثاني = ٦ ومجموعها = ٢٤ أكتب الحدود الخمسة الأولى منها.

(٦٦) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية هو الواحد الصحيح وأساسها هو العدد ٤ ، فهل يكون العدد ١٩١ من حدودها ؟

(٦٧) كم عدد الأعداد الطبيعية المكونة من منزلتين والتي هي من مضاعفات العدد ٧ ؟

(٦٨) متسلسلة حسابية تزايدية (قيم حدودها تزداد باستمرار) مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي ٢٧ ومجموع مربعاتها يسا وي ٢٧٥ ، أكتب هذه الحدود الثلاثة فقط.

(٦٩) عدد طبيعي مكون من ثلاث منازل ، تشكل أرقامه متتالية هندسية ، وإذا طرحنا منه العدد ٧٩٢ ينتج عدد مكون من الأرقام الثلاثة نفسها ولكن بشكل معكوس وإذا جمعنا العدد ٢ إلى الرقم الثاني شكلت أرقام العدد الناتج متتالية حسابية ، فما العدد ؟ {٩٣١}

(٧٠) أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة التي حدها العام

$$ح_ن = (-١)^{ن - ١} \times \frac{١}{ن}$$

(٧١) أكتب الحد العام للمتسلسلة ٢,١ + ٢,٠١ + ٢,٠٠١ + ٠٠٠ $\{ ٢ + \frac{١}{١٠^ن} \}$

إرشاد: استعن بالمتسلسلة الهندسية

والحد العام للمتتالية

١، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{١٠}$ ، $\frac{٥}{١٧}$ ، .... $\{ \frac{ن + ١}{ن^٢ + ١} \}$

(٧٢) أكتب الأعداد العشرية التالية على صورة $\frac{أ}{ب}$ كأعداد نسبية

$٠,\overline{٢٤}$ ، $٠,\overline{١١٢}$ ، $٠,٦\overline{٢٤٥}$

$\{ \frac{٨}{٣٣} ، \frac{١١٢}{٩٩} ، \frac{٦٨٧}{١١٠٠} \}$

إرشاد: استعن بالمتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية

(٧٣) أكتب المتسلسلة $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٤}$ + ٠٠٠ باستخدام رمز المجموع

إرشاد: جد حدها العام

(٧٤) ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التقاربية ١٢ – ٦ + ٣ – ٣ – ٠٠٠ {٨}

(٧٥) جد مجموع المتسلسلة ٧ + ١٣ + ١٩ + ٠٠٠ + ١٢٧

إرشاد: حسابية

(٧٦) هل المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣^ن$ حسابية أم هندسية ؟

(٧٧) ما أساس المتتالية $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$ ، .... {٢}

إرشاد: هندسية

(٧٨) عدد سكان مدينة ٢٥٠٠٠ نسمة يزداد هذا العدد بنسبة ٢٪ سنوياً (بالنسبة لعدد السكان الأصلي)، قدِّر عدد سكانها بعد ٥ سنوات ؟

(٧٩) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين العددين ٣٦، ١٢

(٨٠) جد مفكوك «١» $\sum_{ر=١}^{٣} (٣ر - ١)$ «٢» $\sum_{ر=١}^{٤} ٣^{ر+١}$ «٣» $\sum_{ر=١}^{٥} (\frac{١}{ر} - ١)$

(٨١) جد عدد حدود المتسلسلة ٢ + ٥ + ٨ + ··· + ٢٩

وعدد حدود المتسلسلة — ١ + ٢ — ٤ + ··· — ٦٤

إرشاد: حدد نوع المتسلسلة أولاً

(٨٢) أوجد مجموع المتسلسلة $٣ - ٣^{٢} + ٣^{٣} - \cdots - ٣^{٨}$

إرشاد: متسلسلة هندسية

(٨٣) كم حداً من المتسلسلة الحسابة ٩ + ١١ + ١٣ + ··· يجب أخذه ليكون المجموع مساوياً لمجموع تسعة حدود من المتسلسلة الهندسية ٢ — ٦ + ١٢ — ···

{١٩}

(٨٤) أربعة أعداد حقيقية، تشكل الثلاثة الأولى منها متتالية هندسية، وتشكل الثلاثة الأخيرة متتالية حسابية أساسها ٦ وكان العدد الأول منها = العدد الرابع، فما هي هذه الأعداد.

{٨، - ٤، ٢، ٨}

(٨٥) أكتب المتتالية الحسابية التي مجموع ن من حدودها = $ن^٢ + ٢ ن$

{٣، ٥، ٧، . . .}

إرشاد: $ح_١ = جـ_١$ حيث $ح_١$، $جـ_١$ المجموع

$ح_٢ = جـ_٢ - جـ_١$ وكذلك $ح_٣ = جـ_٣ - جـ_٢$

(٨٦) مثلث متساوي الأضلاع محيطه ١٨ سم، نُصفت أضلاعه ووصل بينها فتكون مثلث ثاني ثم نصفت أضلاع المثلث الثاني ووصل بينها فتكون مثلث ثالث وهكذا، أوجد مجموع محيطات المثلثات المتكونة إلى مالانهاية.

(٨٧) ثلاثة أعداد تشكل متسلسلة هندسية مجموعها $\frac{١}{٦}$ ٦ وحاصل ضربها ٨، فما هي هذه الأعداد؟

(٨٨) ما نوع المتسلسلة $\sum_{ك=١}^{\infty}$ (٣ ك + ٢)؟

(٨٩) أكتب الحد العام لكلٍ من المتسلسلات

«١» ٣٢ + ١٦ + $\frac{١}{٨}$ + ...

«٢» $(١ - \frac{١}{٢}) + (٢ - \frac{١}{٣}) + (٣ - \frac{١}{٤}) + ...$ $\{ن - \frac{١}{ن+١}\}$

«٣» $\frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٣ + ...$

(٩٠) احسب مجموع كل من المتسلسلات

«١» $\sum_{ن=٢}^{٦} (ن^٢ + ١)$ «٢» $\sum_{ن=١}^{\infty} ٣^ن (\frac{٢}{٩})^ن$

(٩١) أكتب مفكوك المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{٥} (٢ - ٣ن)^{-١}$

(٩٢) أكتب المتسلسلة ١، ٣، ٥، . . . ، ٢٤٩ باستخدام رمز المجموع $\sum$

(٩٣) في تدريب لسباق المارثون المنتظر قطع أحد الرياضيين في اليوم الأول مسافة ٣ كم وفي اليوم الثاني ٦ كم وفي اليوم الثالث ٩ كم وهكذا، فإذا قطع في آخر يوم للتدريب ٣٦ كم.

احسب الحد العام للمتتالية التي تمثل المسافات المقطوعة في الأيام المختلفة ؟

$\{٣ن\}$

(٩٤) هل المتتاليات «١» ١، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$

«٢» ١، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٤}$ متساويتان ؟

إرشاد: تتساوى المتتاليات بشكل عام كالإقترانات، إذا كان لها نفس المجال ونفس الحد العام

(٩٥) أكتب الحدود أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات والمتسلسلات التالية:

«١» المتتالية التي حدها العام: $ح_ن = \frac{٢ن}{ن^{٢} + ١}$

«٢» المتتالية ٣، ٣، ٣، . . .

«٣» المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن + ١}{ن + ٣}$

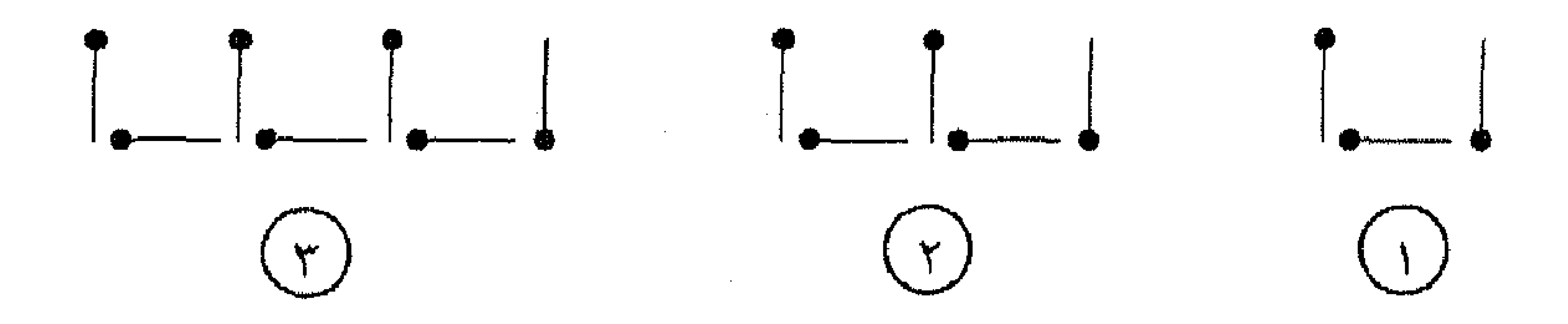
«٤» المتسلسلة $- ١ + ١ - ١ + ١ + \cdots$

«٥» المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{ن(ن+1)}{2}$

«٦» المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$

«٧» المتسلسلة $\sum \left(\frac{ن(ن+1)}{2}\right)^{2}$

(٩٦) رُتبتْ مجموعة من أعواد الثقاب كما هو مبين في الأشكال



فإذا استمر الترتيب على نفس النمط، فكم عوداً من الثقاب يلزم لعمل كل من الشكلين الرابع عشر والرابع والعشرين

إرشاد: أوجد أولاً الحدالعام للمتتالية الناتجة

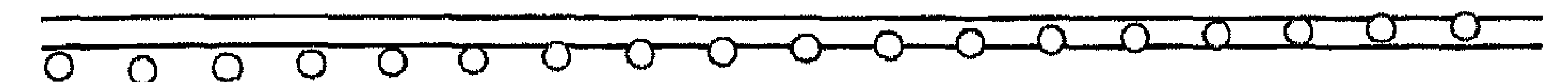
(٩٧) متتالية حدها الرابع ١١، وحدها السابع ٢٠، فما حدها التاسع {٢٦}

(٩٨) ما مجموع الحدود المئة الأولى والحدود المئة الثانية من المتسلسلة

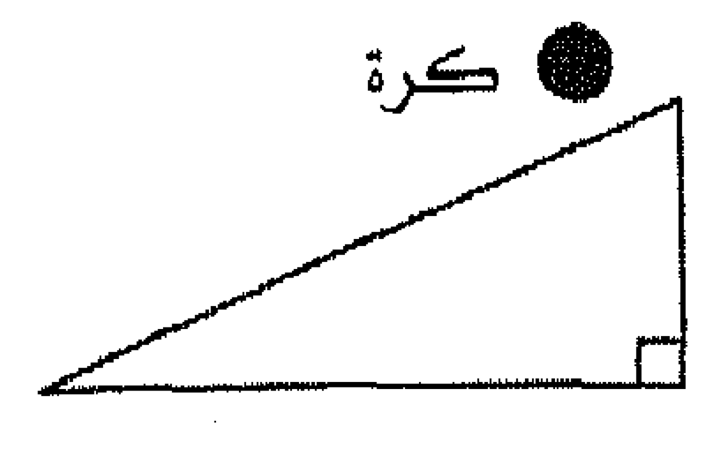
٥ + ١٠ + ١٥ + ...

(٩٩) إذا كان مجموع أول ن حداً من متسلسلة حسابية يساوي $2ن^{2} - 7ن$ فما قيمة الحد العاشر في هذه المتسلسلة.

إرشاد: $ح_{10} = جـ_{10} - جـ_{9}$ حيث جـ المجموع



(١٠٠) تتدحرج كرة حديدية على منحدر طوله ٣٦ متراً كما في الشكل فتقطع في الثانية الأولى ٤ سم والثانية الثانية ١٢ سم والثانية الثالثة ٢٠ سم وهكذا كم ثانية تستغرق الكرة في قطع المنحدر كاملاً ؟



(١٠١) جد مجموع المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{٣٠} (٤\text{ن} - ٢)$

(١٠٢) ما عدد حدود المتتالية ١، ٣ ،٩، . . . ، ٢٤٣

إرشاد : استعن بالحد العام

(١٠٣) متتالية هندسية حدها الأول = ٣ وحدها الرابع = ٢٤ جد حدها الثامن.

(١٠٤) أوجدت خلود مجموع المتسلسلة ٢ − ٤ + ٨ − ٠٠٠ + ٥١٢ فكان ٣٤٢، فسر كيف حصلت على الجواب ؟

(١٠٥) ما مجموع كل من المستسلسلات التالية:

«١» المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{ن}}$ {٢}

«٢» المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن} - ١}$

«٣» المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٥}\right)^{\text{ن} + ١}$

(١٠٦) خططت أسرة لتوفير مبلغ ٢٠٠٠ دينار لصيانة البيت القاطنين فيه فما قيمة الدفعة المنتظمة التي على الأسرة أن تودعها في البنك كل ٣ شهور ولمدة سنتين علماً بأن بعض فوائده مركبة ٨٪ سنوياً تحسب كل ربع سنة.

(١٠٧) ما النسبة بين الحد الرابع في متتالية حسابية حدها الأول ٣ وأساسها − ٢ والحد الخامس في متتالية هندسية حدها الأول − ٣ وأساسها ٢ ؟

(١٠٨) ما عدد حدود المتسلسلة ٧٧ + ٦٩ + ٦١ + ··· + ١٣

(١٠٩) إذا كانت أ ، ٧ ، . . . ، ب ، ٢٥ ، . . . متتالية حسابية وكانت ب = ٥أ + ٢ فما قيمة كل من أ ، ب

(١١٠) يُريد هُمام توفير ٦٠٠٠ دينار (جملة دفعات) في مدة سنتين لكي يؤثث شقته الجديدة فكم دينار يجب عليه أن يودع شهرياً في حسابه البنكي لكي يوفر هذا المبلغ ؟

علماً أن البنك يعطي فائدة مركبة معدلها السنوي ٦٪ والفوائد تحسب كل شهر.

(١١١) حصلت وسام أثناء دراستها الجامعية على قرض دراسي قيمته ٩٠٠ دينار وبعد تخرجها من الجامعة وحصولها على وظيفة ما عليها أن تسدد القرض بواقع ٧٥ دينار شهرياً ولمدة سنة واحدة فقررت إيداع مبلغ معين في بنك يعطي فائدة مركبة مقدارها ٨٪ سنوياً تحسب كل شهر.

ما المبلغ (القيمة الحالية للدفعات) التي يجب إيداعها في البنك الآن ولمدة سنة لكي تسحب منها الأقساط الشهرية سداداً لقرضها ذاك ؟

(١١٢) إذا كان الحد العام لمتتالية فيبوناسي (١١٧٥ – ١٢٥٠) م الرياضي الإيطالي هو $ح_١ = ح_٢ = ١$ ، $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ أكتب الحدود السبعة الأولى منها.

(١١٣) عرض بائع فواكه كومة من البرتقال على شكل هرم رباعي قاعدته مربعة تحتوي طول ضلع الطبقة السفلى منه ١٦ حبة برتقال ويقل طول ضلع كل طبقة عن الطبقة التي دونها بمقدار حبة واحدة.

أوجد مجموع حباتالبرتقال في كل طبقة من الطبقات، ثم أوجد مجموع حبات البرتقال في الكومة كلها.

إرشاد: حبات البرتقال في الطبقات تشكل متسلسلة هكذا $(١٦)^٢ + (١٥)^٢ + (١٤)^٢ + \cdots + (١٧ - ن)^٢$ ، ودون التربيع فهي حسابية

(١١٤) أدخل ٦ أوساط حسابية بين العددين ٣، ٣٨

(١١٥) ما عدد الأعداد الطبيعية التي تقبل كل منها القسمة على ٧ والأقل من ٣٠٠ ؟

(١١٦) إذا كانت قياسات زوايا مثلث تشكل متتالية حسابية قياس أصغرها ٢٠° فما قياس كل من الزاويتين الآخرتين ؟ { ٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠° }

(١١٧) إذا كانت زوايا مثلث تشكل متتالية حسابية أساسها ١٠° فما قياسات زوايا ذلك المثلث ؟ { ٥٠° ، ٦٠° ، ٧٠° }

(١١٨) إذا كانت قياسات زوايا شكل رباعي تشكل متتالية حسابية فجد قياسات الزوايا تلك ؟ { ٣٦° ، ٧٢° ، ١٠٨° ، ١٤٤° }

إرشاد: الزويا بالنسبة ١ : ٢ : ٣ : ٤ واستعمل التقسيم التناسبي

(١١٩) أُدخِلَ عددٌ من الأوساط الحسابية بين العددين ٣، ٣٣ وكان الوسط الحسابي الرابع منها = ٢٣ ، جد عدد الأوساط الحسابية المُدخلة {٥}

إرشاد : والأساس أيضاً ٥

(١٢٠) أعط أمثلة عددية تُبين فيها أن:

«١» إذا أضيف عدد ثابت مثل جـ إلى كل من حدود متتالية حسابية فالناتج متتالية حسابية.

«٢» إذا ضُرب كل حد من حدود متتالية حسابية بعدد ثابت جـ ≠ صفر فالناتج متتالية حسابية.

«٣» المتتالية الناتجة من جمع الحدود المتناظرة من متتاليتين حسابيتين تكون متتالية حسابية.

(١٢١) سقط جسم غريب من طائرة (مع إهمال مقاومة الهواء) فقطع في الثانية الأولى ٤,٩ متر وفي الثانية الثانية ١٤,٧ متر وفي الثانية الثالثة ٢٤,٥ متر وهكذا: ما المسافة التي يقطعها الجسم الغريب بعد ١٠ ثوان ؟

(١٢٢) تدقُ ساعة حائط مرة واحدة عند الساعة الواحدة ومرتين عند الساعة الثانية وثلاث مرات عند الساعة الثالثة وهكذا حتى الساعة الثانية عشرة ثم تعيد العشرة من جديد ، كم مرة تدق في اليوم (نهار وليل) وفي أسبوع وفي شهر (٣٠ يوم) ؟

(١٢٣) أوجد الحد العاشر للمتسلسلة ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ٠,٠٠٠ + ...

(١٢٤) مثّل المتتالية التي حدها العام $ح_ن = (\frac{1}{2})^ن$ بيانياً على المستوى الديكارتي.

(١٢٥) ما النسبة بين قيمتي الحدين: الثالث في المتتالية $ح_ن = ٣ (١,٥)^ن$

والثالث في المتتالية $ح_ن = ٢٤ (٣)^ن$؟

(١٢٦) سقطت كرة مطاطية من علو ١٠ متر وكانت كل مرة تصطدم فيها بالأرض ترتد (ترتفع) إلى $\frac{٤}{٥}$ العلو السابق. جد مجموع المسافاتالتي تقطعها الكرة حتى تسكن.

إرشاد: المجموع = مجموع الارتدادات للأعلى + مجموع الإسقاطات إلى الأسفل

{٤٠ + ٥٠ = ٩٠ متر}

(١٢٧) إذا كان العدد ٢ هو أول حدود المتسلسة الهندسية اللانهائية التي مجموعها ٣ أكتب أول ٥ حدود منها {أساسها = $\frac{١}{٣}$ }

(١٢٨) أراد كيميائي تخفيف تركيز ١٠ لترات من محلول فأفرغ من الوعاء الذي يحويها لتر واحد وأحلَّ محله لتراً من الماء ثم أفرغ مرة أخرى وأحلَّ محله لتر من الماء وهكذا:

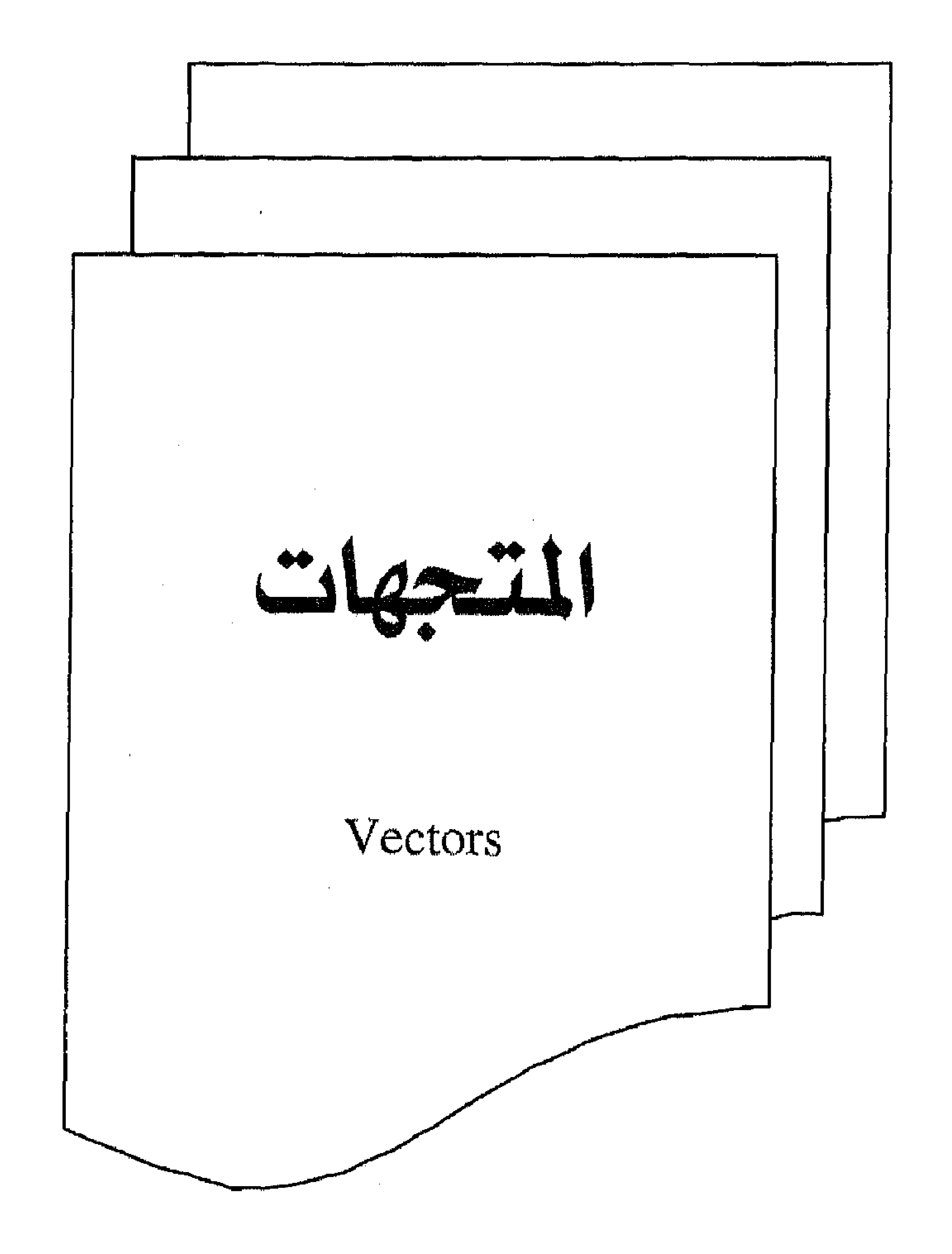
جد قوة تركيز المحلول بعد إجراء العملية ٥ مرات.

(١٢٩) إذا كان $\sqrt[٢]{س} = \sqrt[٣]{ص}\ \sqrt[٧]{ع}$ ، حيث س، ص، ع أعداد حقيقية بين أن الأعداد س، ص، ع، تشكل متتالية هندسية.

إرشاد: استخدم الأسس النسبية وأساس المتتالية

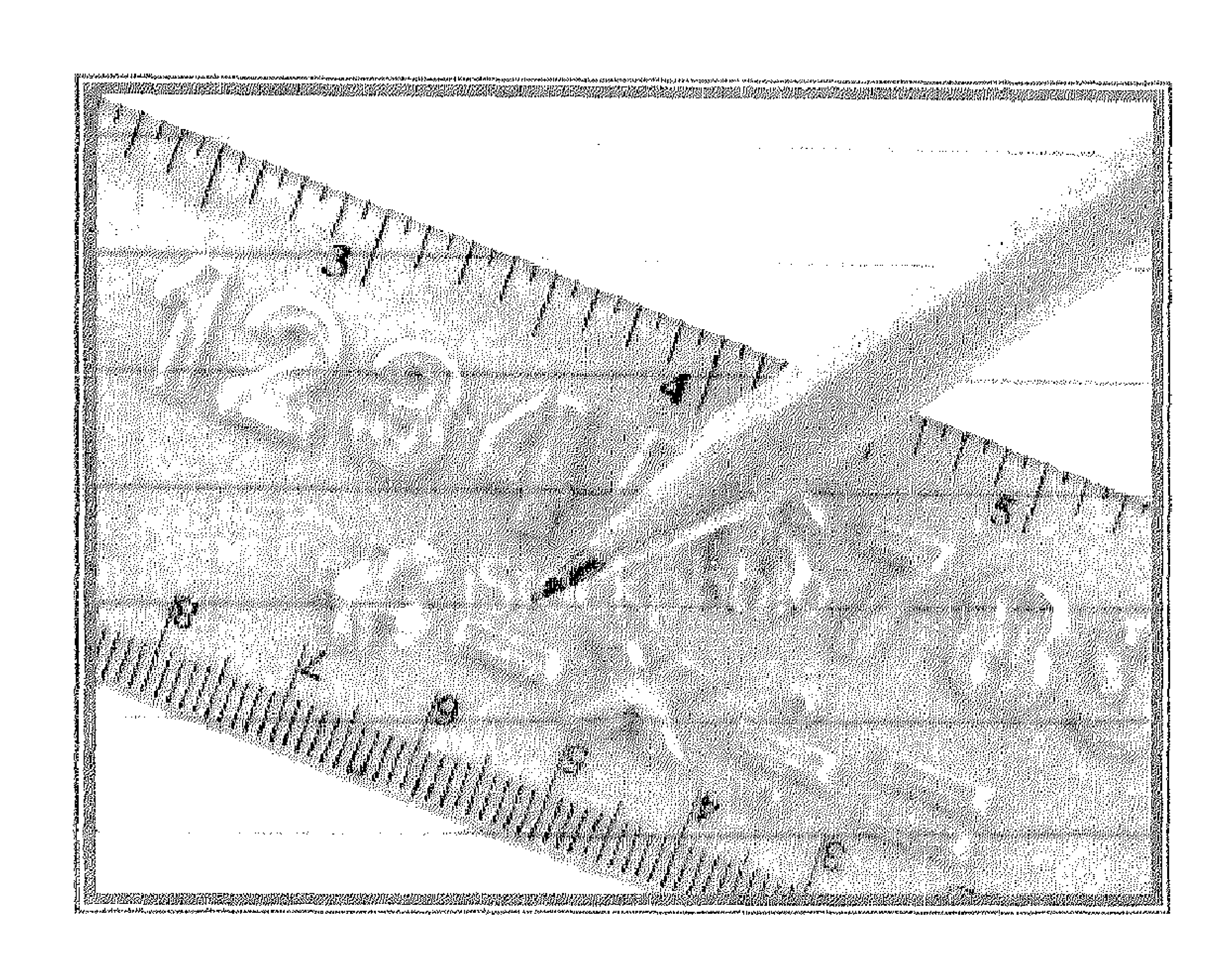
(١٣٠) ستة أعداد حقيقية تُشكل متسلسلة حسابية، مجموعها ٣٦، والعدد الأول منها = ١ والعدد السادس = ١١، أكتب هذه الأعداد بشكل متسلسلة حسابية. {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

(١٣١) إذا كانت الأعداد ٤، أ، ٩ تُشكل متسلسلة هندسية ما قيمة أ {$\pm$ ٦}



المتجهات

Vectors



هناك كميات يمكن وصفها بالمقدار فقط مثل المساحة والكتلة والحجم.

وهناك كميات أخرى لا يمكن وصفها إلاّ بالمقدار والاتجاه مثل السرعة والتسارع والقوة، وهذه الكميات بالذات تسمى الكميات المتجهة ولكننا في الرياضيات نسميها المتجهات.

وبما أن للمتجهات كما لمعظم فروع الرياضيات، بناء جبري وآخر هندسي، يرتبطان معاً برباط متين كونهما مكملين لبعضهما البعض بكل اتساق وترتيب.

لذا:

فدراستنا للمتجهات ستسير على طريقة المزج بين البناءين المذكورين بأسلوب بسيط دون حشو وبلا تعقيد كما يلي:

(١٦ — ١) العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في المستوى

يُمثل المتجه هندسياً على المستوى بقطعة مستقيمة لها نقطة بداية Initial Point تسمى النقطة س على سبيل المثال ونقطة نهاية Teriminal Point تسمى النقطة ص وعلى سبيل المثال، عندها يرمز للمتجه بالرمز $\overleftarrow{\text{س ص}}$ أو $\overleftarrow{\text{ع}}$ كما في الشكل

س ص

أما طول $\overleftarrow{\text{س ص}}$ فيرمز له بالرمز $|\overleftarrow{\text{س ص}}|$ «القيمة المطلقة» أو $|\overleftarrow{\text{ع}}|$ وهذا يمثل عدد حقيقي.

قبل مناقشة العمليات الهندسية على المتجهات علينا أن نوضح بعض المفاهيم والمعطيات التي لها علاقة بالمتجهات وهي:

❀ **المتجه الصفري** «Zero Vector»

هو المتجه الذي طوله صفر وليس له اتجاه على الإطلاق ويرمز له بالرمز $\vec{0}$

❁ متجه الوحدة «Unite Vector»

هو المتجه الذي طوله وحدة واحدة ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{و}$ للسهولة فقط.

❁ المتجهات الحرة «Free Vectors»

تتساوى المتجهات إذا كان لها نفس الطول والاتجاه وهذا ما يُسهِّل عملية نقل المتجهه من مكان لآخر في المستوى أو إزاحته أو انسحابه كما في الشكل.

فالمتجهات $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ جميعها متساوية كونها متطابقة من حيث الأطوال.

أي أن $|\overleftarrow{س}| = |\overleftarrow{ص}| = |\overleftarrow{ع}|$

ولها نفس الاتجاه كما يوضح الشكل أعلاه

❁ جميع المتجهات:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين فإن $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ متجه ثالث نحصل عليه بإحدى القاعدتين التاليتين:

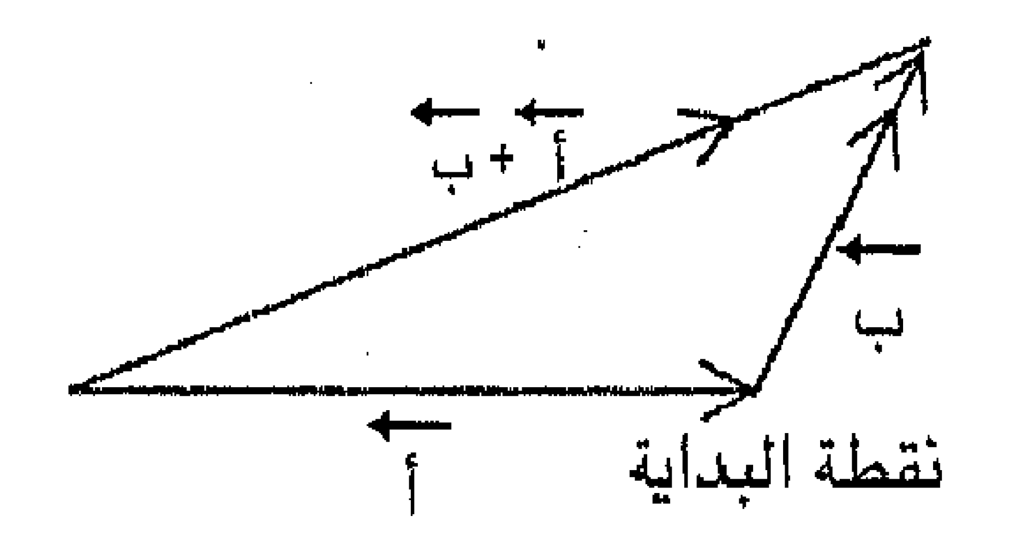
(١) قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات:

اسحب أحد المتجهين وليكن $\overleftarrow{ب}$ حتى تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه $\overleftarrow{أ}$ ثم أكمل متوازي الأضلاع فيكون القطر المنطلق من نقطة

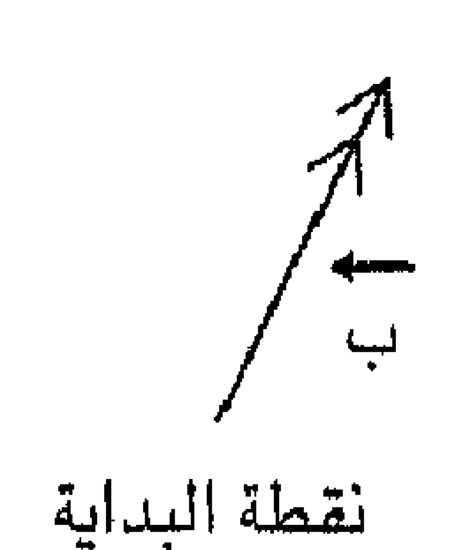
البدايتين (نقطة البداية المشتركة) هو حاصل الجمع $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ كما في الشكل هكذا:

$\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ هو المتجه الممثل بالقطر من نقطة البداية المشتركة للمتجهين معاً.

(٢) قاعدة المثلث لجمع المتجهات:



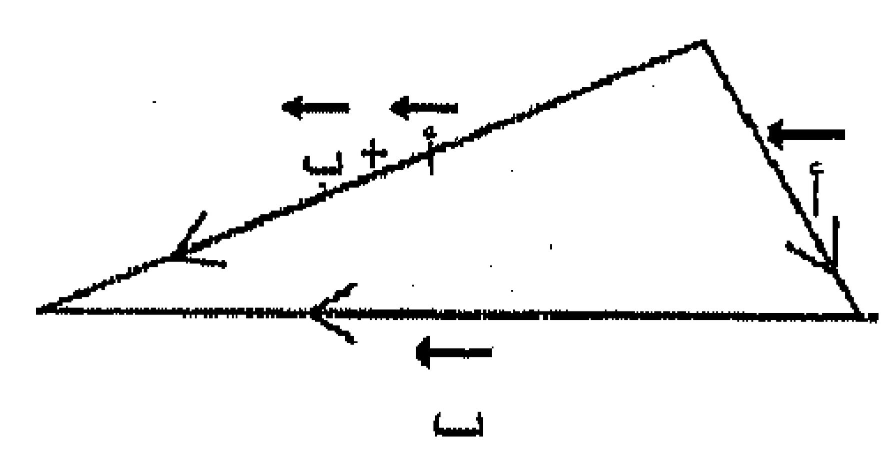
اسحب أحد المتجهين وليكن $\overleftarrow{\text{ب}}$ بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ كما في الشكل فيكون الضلع الثالث والذي يبدأ من نقطة بداية $\overleftarrow{\text{أ}}$ وينتهي بنقطة نهاية $\overleftarrow{\text{ب}}$ هو حاصل الجمع $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$



وبشكل عام لجمع متجهين هندسياً هناك قاعدتين:

الأولى: قاعدة متوازي الأضلاع – والمجموع يمثل قطره المحصور بين المتجهين.

الثانية: قاعدة المثلث – والمجموع ضلعه الثالث.

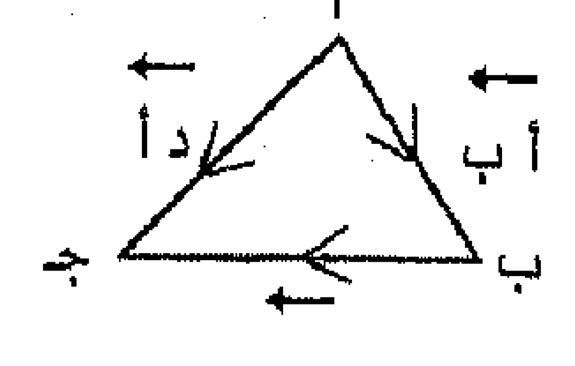


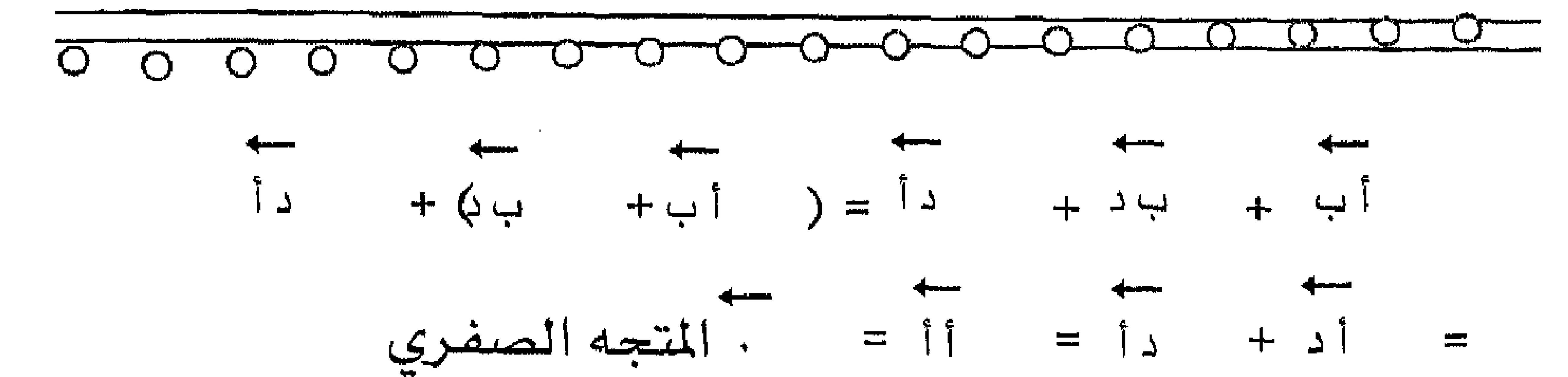
والآن نورد بعض الخصائص لجمع المتجهات:

أولاً: $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$ (جميع المتجهات تبديلي)

ثانياً: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ = $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ (قاعدة مثلث، وتسمى علاقة شال)

وبناءً عليه وبشكل عام فإن:





$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بد}} + \overleftarrow{\text{دأ}} = (\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بد}}) + \overleftarrow{\text{دأ}}$

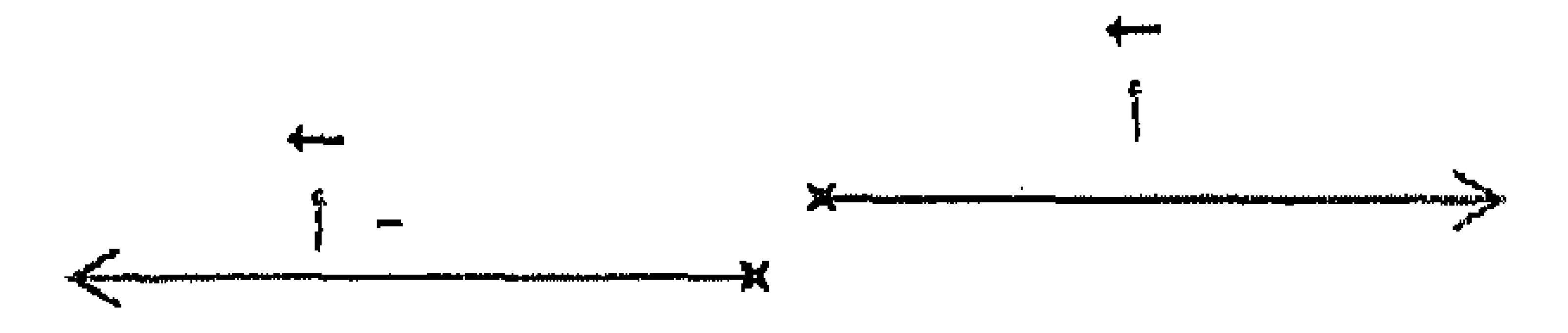
$= \overleftarrow{\text{أد}} + \overleftarrow{\text{دأ}} = \overleftarrow{\text{أأ}} = \overleftarrow{0}$ المتجه الصفري

كما في الشكل

*** سالب المتجه:**

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ متجه فإن $-\overleftarrow{\text{أ}}$ يسمى سالب المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

وسالب المتجه $(-\overleftarrow{\text{أ}})$ هو متجه له نفس طول المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ واتجاه يعاكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ كما في الشكل.



وبشكل عام إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ متجه فإن سالب المتجه $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{بأ}}$

أي أن $\overleftarrow{\text{بأ}} = -\overleftarrow{\text{أب}}$ (بتغيير نقطة النهاية إلى البداية والعكس)

وكذلك $-\overleftarrow{\text{س ص}} = \overleftarrow{\text{ص س}}$

أي أن $\overleftarrow{\text{أب}} =$ سالب $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، وكذلك $\overleftarrow{\text{بأ}} =$ سالب $\overleftarrow{\text{أب}}$

هذا ويحقق المتجه وسالبه العلاقة التالية:

المتجه + سالب المتجه = المتجه الصفري

أي أن $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بأ}} = \overleftarrow{\text{أأ}} = \overleftarrow{0}$ (حسب قاعدة شال)

والآن وباستخدام سالب المتجه سنعرّف عملية طرح المتجهات كما يلي:

$\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} + (-\overleftarrow{\text{ب}})$

وكذلك $\overleftarrow{\text{أب}} - \overleftarrow{\text{بجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{جـب}}$ (لأن $\overleftarrow{\text{جـب}} = - \overleftarrow{\text{بجـ}}$)

ولتمثيل عملية الطرح $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ هندسياً باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع نبين أن:



نأخذ سالب أحد المتجهين وليكن ب وتمثله وتتم عملية الطرح وكأنها جمع

أي أن $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ تمثل قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $-\overleftarrow{\text{ب}}$

بينما $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ يمثل قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$

أي أن $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$

بينما $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} + (- \overleftarrow{\text{ب}})$

⇐مثال: إذا كانت النقط أ ، ب، جـ هي رؤوس المثلث أ ، ب، جـ أوجد هندسياً مجموع المتجهات $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـأ}}$

الحل: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} = \overleftarrow{\text{جـأ}}$ (علاقة مثال)

$\therefore \overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـأ}} = \overleftarrow{\text{أأ}} = \text{صفر}$

★ **ضرب المتجه بعدد حقيقي:**

ملحوظة: عملية ضرب المتجهات تتم على أشكال وسنناقش منها الآن:

«عملية ضرب المتجه بعدد حقيقي فقط» والبقية ستأتي فيما بعد:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ متجه غير صفري وكان م عدداً حقيقياً غير الصفر فإن

$\overleftarrow{م أ}$ هو متجه طوله | م | | $\overleftarrow{أ}$ | واتجاهه هو اتجاه المتجه $\overleftarrow{أ}$ نفسه إذا كان م عددٌ موجب وبعكس الاتجاه إذا كان م عدداً سالباً.

مثال: ٢ $\overleftarrow{أ}$ متجه طوله يساوي ضعفي طول $\overleftarrow{أ}$ وله نفس الاتجاه $\overleftarrow{أ}$ إما - ٢ $\overleftarrow{أ}$ متجه طوله يساوي ضعفي طول $\overleftarrow{أ}$ وله اتجاه معاكس لاتجاه $\overleftarrow{أ}$ كما في الأشكال.

$\overleftarrow{أ}$

$\overleftarrow{٢أ}$

$\overleftarrow{أ}$

- $\overleftarrow{٢أ}$

عكس الاتجاه

أما إذا كان م = صفر أو $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{٠}$ أو كلاهما:

فإن: م $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{٠}$

كون (صفر) $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{٠}$

أو (م) $\overleftarrow{٠}$ = $\overleftarrow{٠}$

وكذلك (صفر) $\overleftarrow{٠}$ = $\overleftarrow{٠}$

والآن يمكن استنتاج الخواص التالية كضرب المتجه بعدد حقيقي:

(١) إذا كان م، ن عددين حقيقيين

وكان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين فإن

$(م + ن)\overleftarrow{أ} = م\,\overleftarrow{أ} + ن\,\overleftarrow{أ}$ (توزيع الأعداد الحقيقية على المتجه)

$م\,(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) = م\,\overleftarrow{أ} + م\,\overleftarrow{ب}$ (توزيع المتجه على العدد الحقيقي)

وكذلك $ن\,(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) = ن\,\overleftarrow{أ} + ن\,\overleftarrow{ب}$ (توزيع المتجه على العدد الحقيقي)

(٢) يتوازى المتجهان إذا ساوى أحدهما حاصل ضرب الآخر بعدد حقيقي غير الصفر، أي أن:

$\overleftarrow{أ} \,//\, \overleftarrow{ب}$ إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{ب} = م\,.\,\overleftarrow{أ}$ ، $م \neq$ صفر

والتفسير: $\overleftarrow{أ}$ ، $٥\,\overleftarrow{أ}$ متجهان متوازيان.

كون $\overleftarrow{أ}$ ، $٥\,\overleftarrow{أ}$ لهما نفس الاتجاه كما في الشكل

$\overleftarrow{أ}$

$٥\overleftarrow{أ}$

وكذلك $\overleftarrow{أ}$ ، $-٥\,\overleftarrow{أ}$ متجهان متوازيان

كون $\overleftarrow{أ}$ ، $-٥\,\overleftarrow{أ}$ لهما اتجاهان متعاكسان كما في الشكل

$\overleftarrow{أ}$

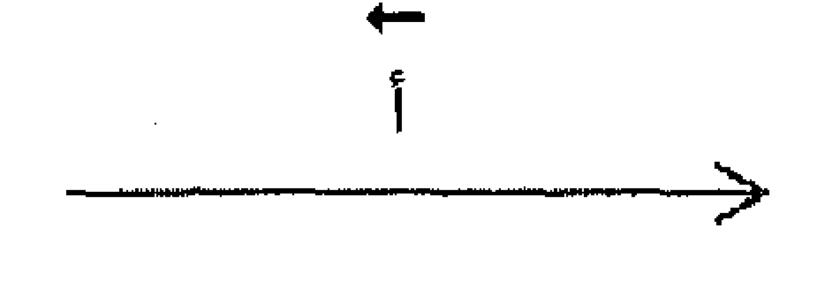
$-٥\overleftarrow{أ}$

مثال: إذا كان $|\overleftarrow{أ}| = ٤$ احسب $|-٣\,\overleftarrow{أ}|$

بما أن طول $\overleftarrow{أ} = ٤$

فطول $-$ ٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = |$-$ ٣ (٤)| = | $-$ ١٢ | = ١٢

ولكن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $-$ ٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ لها اتجاهان متعاكسان كما في الشكل



أما طول | $-$ ٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ | = | $-$ ٣ × ٤ | = ١٢ القيمة موجبة لأن الأطوال كميات غير متجهة لا تقاس إلا بالمقدار فقط.

⇦مثال: من الشكل المجاور بين أن $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}} + \overleftarrow{\text{د}} =$ صفر

نصل القطر ص ل والآن:

$\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{هـ}}$ (قاعدة المثلث)

ونكمل $\overleftarrow{\text{هـ}} + \overleftarrow{\text{جـ}} = -\overleftarrow{\text{د}}$ (قاعدة المثلث)

ثم $-\overleftarrow{\text{د}} + \overleftarrow{\text{د}} = \overleftarrow{\cdot}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}} + \overleftarrow{\text{د}} = \overleftarrow{\cdot}$ المطلوب بيانه.

⇦مثال: متى يكون $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\cdot}$ ؟

الجواب عندما يكون $\overleftarrow{\text{أ}} = -\overleftarrow{\text{ب}}$

أو العكس $\overleftarrow{\text{ب}} = -\overleftarrow{\text{أ}}$

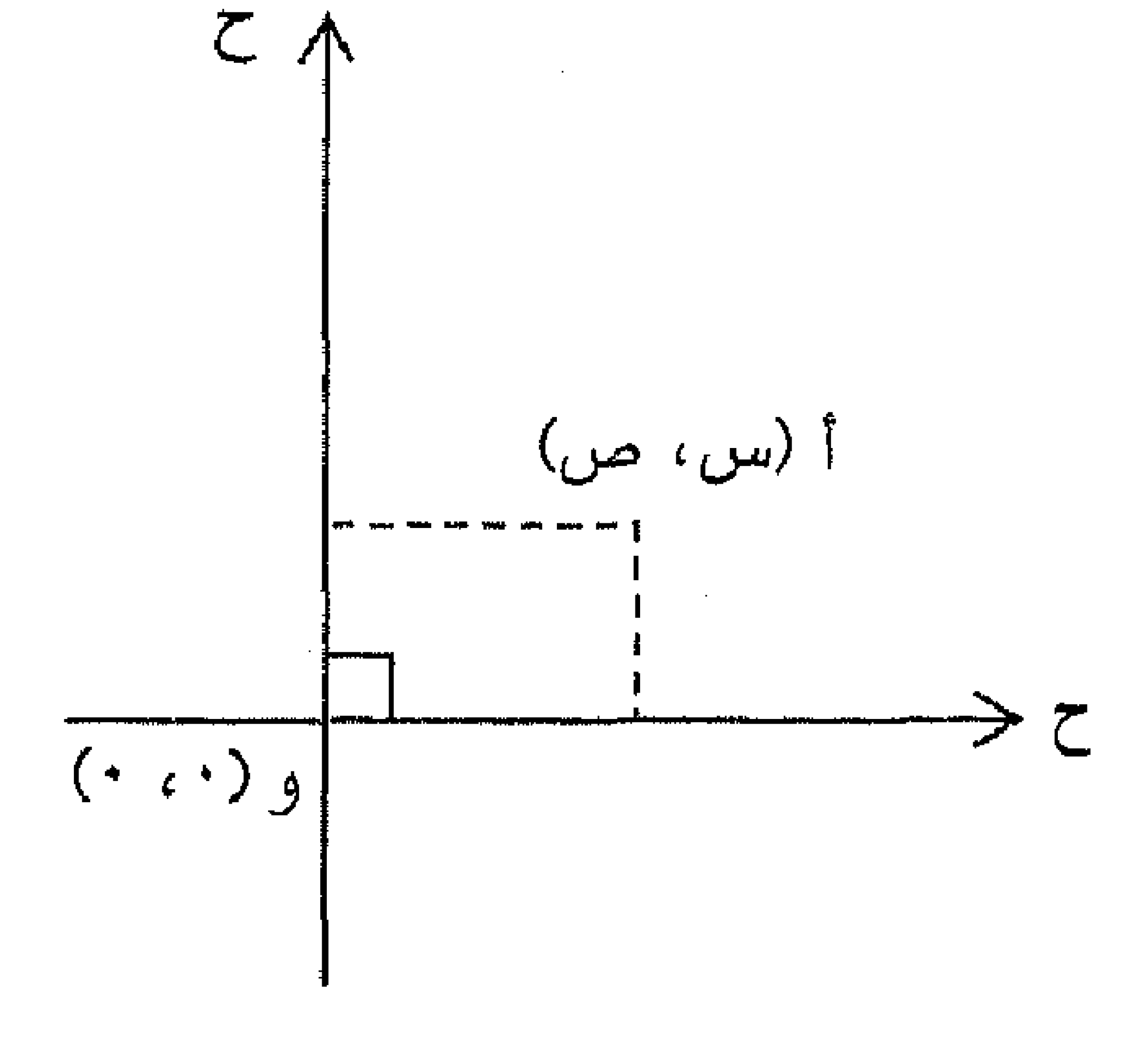
كون $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = -\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\cdot}$

وكذلك $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\cdot}$ والحالتين صواب

جبر المتجهات في المستوى:

المقصود بجبرالمتجهات هو التمثيل الجبري للمتجهات في المستوى بطريقة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية ثم إجراء العمليات الرياضية عليها:

نُذكِّر أولاً بالنظام الإحداثي المتعامد في المستوى الديكارتي كما في الشكل من المعلوم أن كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية هكذا:

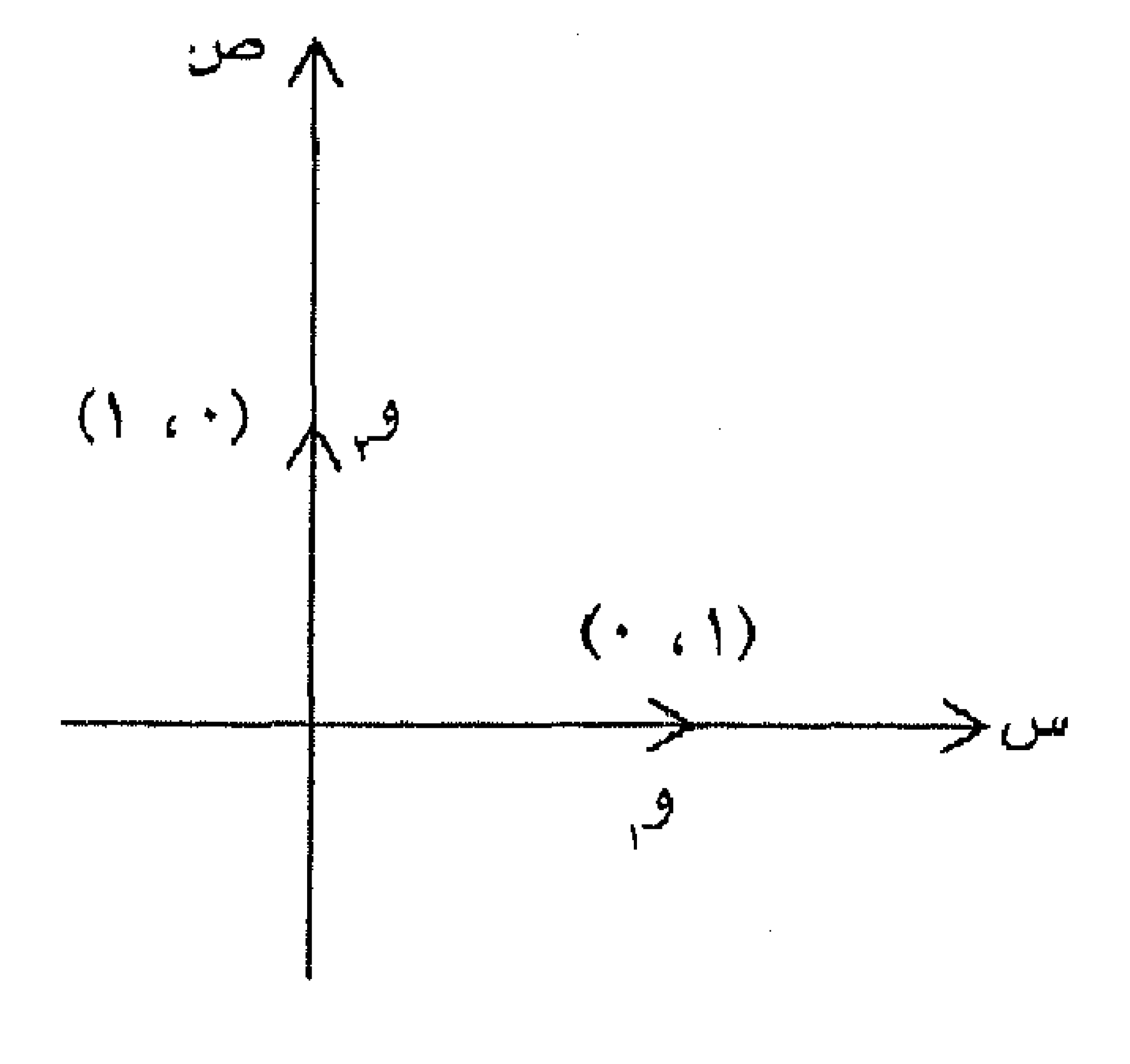


أ (س، ص) وحيث و (٠ ، ٠) نقطة الأصل، هذا ما ابتكره ديكارت وأسماه الهندسة الديكارتية أو التحليلية أو هندسة النقط.

لتمثيل المتجهات في المستوى الديكارتي نُعرِّف متجهي الوحدة $و_1$ ، $و_2$ حيث

متجه $و_1$ يبدأ من نقطة الأصل وباتجاه محور السينات الموجب.

متجه $و_2$ يبدأ من نقطة الأصل وباتجاه محور الصادات الموجب.



كما في الشكل

حيث $و_1$ ⟵ (١، ٠)

$و_2$ ⟵ (٠ ، ١)

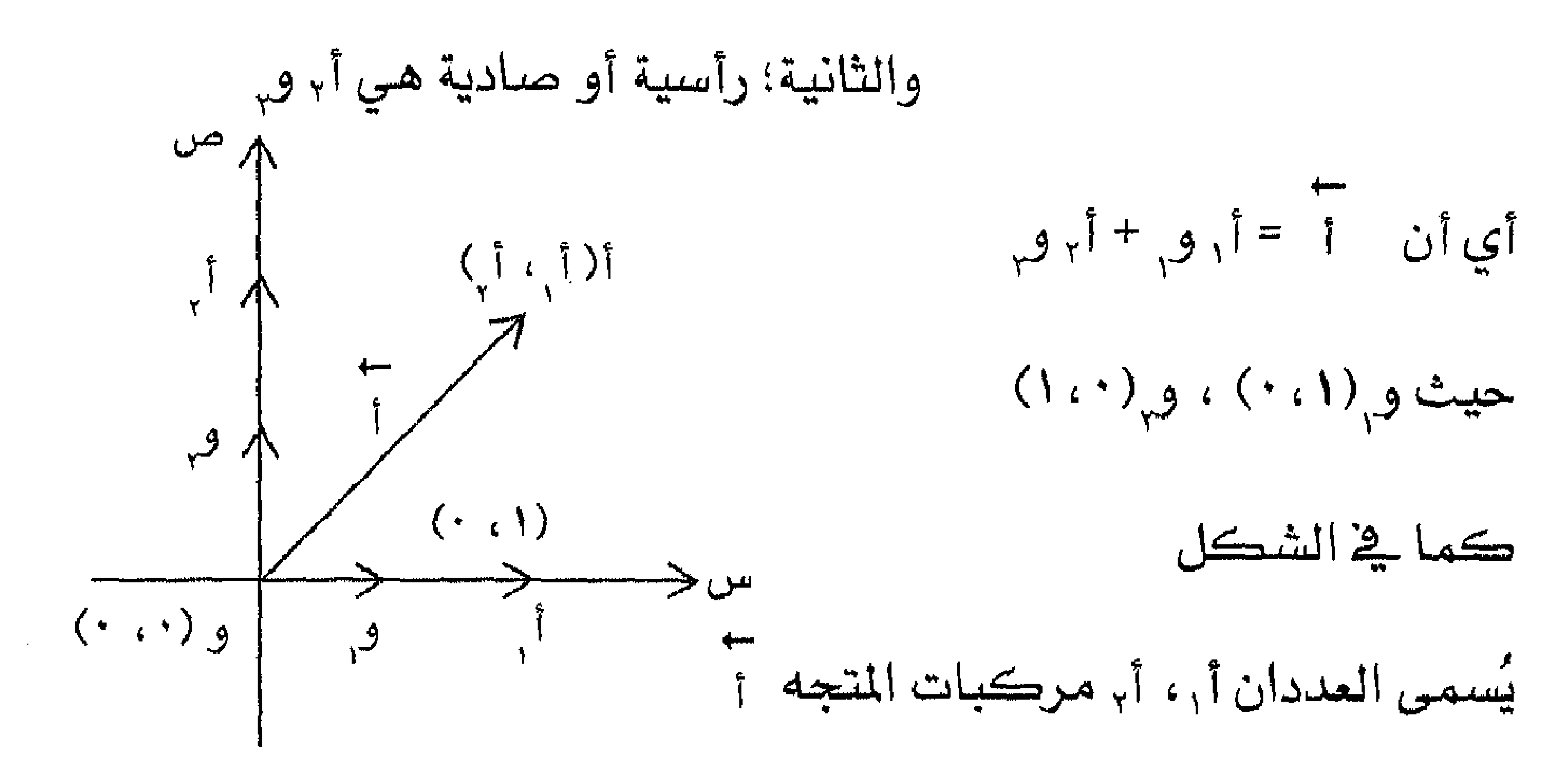
وبناء عليه يمكننا كتابة المتجه $\overleftarrow{أ}$ على صور متجهين كما يلي:

الأول موازٍ لمحور السينات وطوله أ$_{١}$

الثاني موازٍ لمحور الصادات وطوله أ$_{٢}$

وكأنك تحلل $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلى مركبتين: الأولى؛ أفقية أو سينية هي أ$_{١}$ و$_{١}$

والثانية؛ رأسية أو صادية هي أ$_{٢}$ و$_{٢}$



أي أن $\overleftarrow{\text{أ}}$ = أ$_{١}$ و$_{١}$ + أ$_{٢}$ و$_{٢}$

حيث و$_{١}$(١ ، ٠) ، و$_{٢}$(٠ ، ١)

كما في الشكل

يُسمى العددان أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ مركبات المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

كما تسمى هذه العلاقة

$\overleftarrow{\text{أ}}$ = أ$_{١}$ و$_{١}$ + أ$_{٢}$ و$_{٢}$ التمثيل الجبري للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

أو تجميعاً خطياً Linear Combination

وهو تمثيل بدلالة متجهي الوحدة و$_{١}$ ، و$_{٢}$ وهو تمثيل وحيد كون و$_{١}$ تمثيل (١ ، ٠) ، و$_{٢}$ تمثل (٠ ، ١) فقط.

وفي التمثيل الجبري للمتجهات في المستوى يمكن استنتاج الخواص التالية:

(١) $\overleftarrow{\text{أ}}$ = أ$_{١}$ و$_{١}$ + أ$_{٢}$ و$_{٢}$ (مُمثل جبرياً)

$\overleftarrow{\text{ب}}$ = ب$_{١}$ و$_{١}$ + ب$_{٢}$ و$_{٢}$ (مُمثل جبرياً)

فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ إذا وفقط إذا كان أ$_{١}$= ب$_{١}$

أ$_{٢}$= ب$_{٢}$



(٢) ومن قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي أو من نظرية فيثاغورس فإن:

$$|\overleftarrow{أ}| = \sqrt{أ_{١}^{٢} + أ_{٢}^{٢}}$$

حيث المثلث أ $أ_{١}$ و قائم الزاوية في $أ_{١}$

حيث $|\overleftarrow{أ}|$ تسمى طول المتجه $\overleftarrow{أ}$

⇦ مثال: ما قيمة $|\overleftarrow{أ}|$ حيث $\overleftarrow{أ} = ٣و_{١} + ٤و_{٢}$

$$|\overleftarrow{أ}| = \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

والآن سنناقش العمليات على المتجهات بطريقة جبرية هكذا:

(١) $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢}) + (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢})$

«الجمع»

$$= (أ_{١}و_{١} + ب_{١}و_{١}) + (أ_{٢}و_{٢} + ب_{٢}و_{٢})$$

$$= (أ_{١} + ب_{١})و_{١} + (أ_{٢} + ب_{٢})و_{٢}$$

(٢) $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢}) - (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢})$

«الطرح»

$$= (أ_{١}و_{١} - ب_{١}و_{١}) + (أ_{٢}و_{٢} - ب_{٢}و_{٢})$$

$$= (أ_{١} - ب_{١})و_{١} + (أ_{٢} - ب_{٢})و_{٢}$$

(٣) $م\overleftarrow{أ} = م(أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢})$

«الضرب بعدد معين»

$$= م أ_{١}و_{١} + م أ_{٢}و_{٢}$$

⇦ مثال: إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣و_{١} - ٢و_{٢}$

$\overleftarrow{ب} = -٦ و_١ + ٧ و_٢$

أوجد $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ ، $٤ \overleftarrow{أ}$

أولاً: $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (٣ و_١ - ٢ و_٢) + (-٦ و_١ + ٧ و_٢)$

$= (٣ و_١ - ٦ و_١) + (-٢ و_٢ + ٧ و_٢)$

$= -٣ و_١ + ٥ و_٢$

ثانياً: $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (٣ و_١ - (-٦ و_١)) + (-٢ و_٢ - ٧ و_٢)$

$= (٣ و_١ + ٦ و_١) + (-٩ و_٢)$

$= ٩ و_١ - ٩ و_٢$

ثالثاً: $٤ \overleftarrow{أ} = ٤ (٣ و_١ - ٢ و_٢)$

$= ١٢ و_١ - ٨ و_٢$

ويمكن الآن القول أن $\overleftarrow{أ ب} = ب - أ = (ب_١ و_١ + ب_٢ و_٢) - (أ_١ و_١ + أ_٢ و_٢)$

$= (ب_١ و_١ + أ_١ و_١) + (ب_٢ و_٢ - أ_٢ و_٢)$

$= (ب_١ - أ_١) و_١ + (ب_٢ - أ_٢) و_٢$

مثال: إذا كان $\overleftarrow{أ ب}$ متجه حيث $\overleftarrow{أ} = ٥ و_١ + ٤ و_٢$

$\overleftarrow{ب} = ٣ و_١ - ٥ و_٢$

فإن $\overleftarrow{أ ب} = ب - أ = (٣ و_١ - ٥ و_٢) + (٥ و_١ + ٤ و_٢)$

$$= (٣\,\text{و}_{١} - ٥\,\text{و}_{١}) + (-\,٥\,\text{و}_{٢} - ٤\,\text{و}_{٢})$$

$$= -\,٢\,\text{و}_{١} - ٩\,\text{و}_{٢}$$

والآن يمكن القول أن عمليات الجمع والطرح والضرب بعدد حقيقي للمتجهات تتم وكأنها مقادير جبرية وهذا هو صُلب مفهوم «جبر المتجهات».

⇦مثال: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = ٥\,\text{و}_{١} - ٣\,\text{و}_{٢}$

$$\overleftarrow{\text{ب}} = ١١\,\text{و}_{١} + \text{و}_{٢}$$

$$\overleftarrow{\text{حـ}} = -\,٤\,\text{و}_{١} + ٢\,\text{و}_{٢}$$

جد المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ الذي يحقق المعادلة

$$\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{س}} = ٢\,\overleftarrow{\text{حـ}} - \overleftarrow{\text{س}}$$

الحل $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{س}} = ٢\,\overleftarrow{\text{حـ}} - \overleftarrow{\text{س}}$

$$+\,\overleftarrow{\text{س}} \qquad\qquad +\,\overleftarrow{\text{س}}$$

$$\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + ٢\,\overleftarrow{\text{س}} = ٢\,\overleftarrow{\text{حـ}}$$

$$-\,\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} \qquad\qquad -\,\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$$

$$٢\,\overleftarrow{\text{س}} = ٢\,\overleftarrow{\text{حـ}} - \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$$

$$= ٢(-\,٤\,\text{و}_{١} + ٢\,\text{و}_{٢}) - (٥\,\text{و}_{١} - ٣\,\text{و}_{٢}) - (١١\,\text{و}_{١} + \text{و}_{٢})$$

$$= -\,٨\,\text{و}_{١} + ٤\,\text{و}_{٢} - ٥\,\text{و}_{١} + ٣\,\text{و}_{٢} - ١١\,\text{و}_{١} - \text{و}_{٢}$$

$$\therefore\ ٢\,\overleftarrow{\text{س}} = -\,٢٤\,\text{و}_{١} + ٦\,\text{و}_{٢}$$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{س}} = -\,١٢\,\text{و}_{١} + ٣\,\text{و}_{٢}$$

(١٦ – ٢) العمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في الفضاء

حتى نستطيع القيام بالعمليات الهندسية والجبرية على المتجهات في الفضاء وجب أولاً أن نقدم نظاماً للإحداثيات ذات الثلاثة أبعاد، وهذا النظام يُعين النقط بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية مثل الثلاثي المرتب (س ر، ص ر، ع ر) والذي يمثل نقطة في الفضاء حيث:

مسقطها الأول السيني هو س ر، س ر $\in$ س محور السينات

ومسقطها الثاني الصادي هو ص ر، ص ر $\in$ ص محور الصادات

ومسقطها الثالث العيني هو ع ر، ع ر $\in$ ع محور العينات

ملحوظة هامة جداً:

«وللسهولة فقط سوف نكتب هذه الثلاثيات باسم النقطة مثل أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$)، ب ($ب_١$، $ب_٢$، $ب_٣$)، . . . إلخ»

ولتعيين النقطة في الفضاء:

نعين أولاً الإحداثي السيني لها ثم نعين الإحداثي الصادي لها ثم نكمل متوازي الأضلاع في المستوى س م ص وبعدها تقوم بإكمال متوازي المستطيلات (بالخطوط المتقطعة، أو غير المتصلة) كما في الشكل.

لنعين أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$) هكذا ←

حيث تم تعيين النقطة

أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$)

ع

$أ_٣$

أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$)

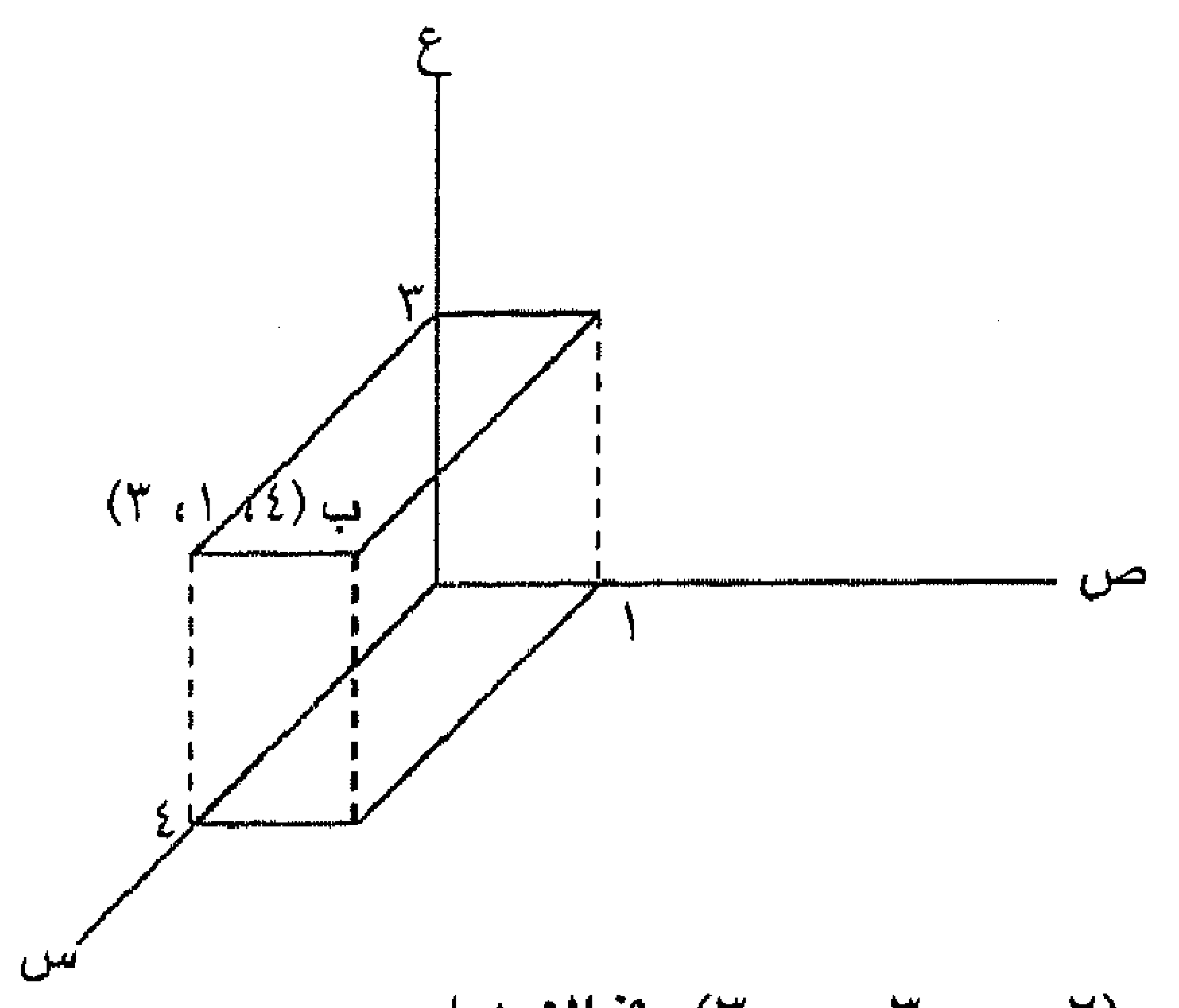
ص

$أ_٢$

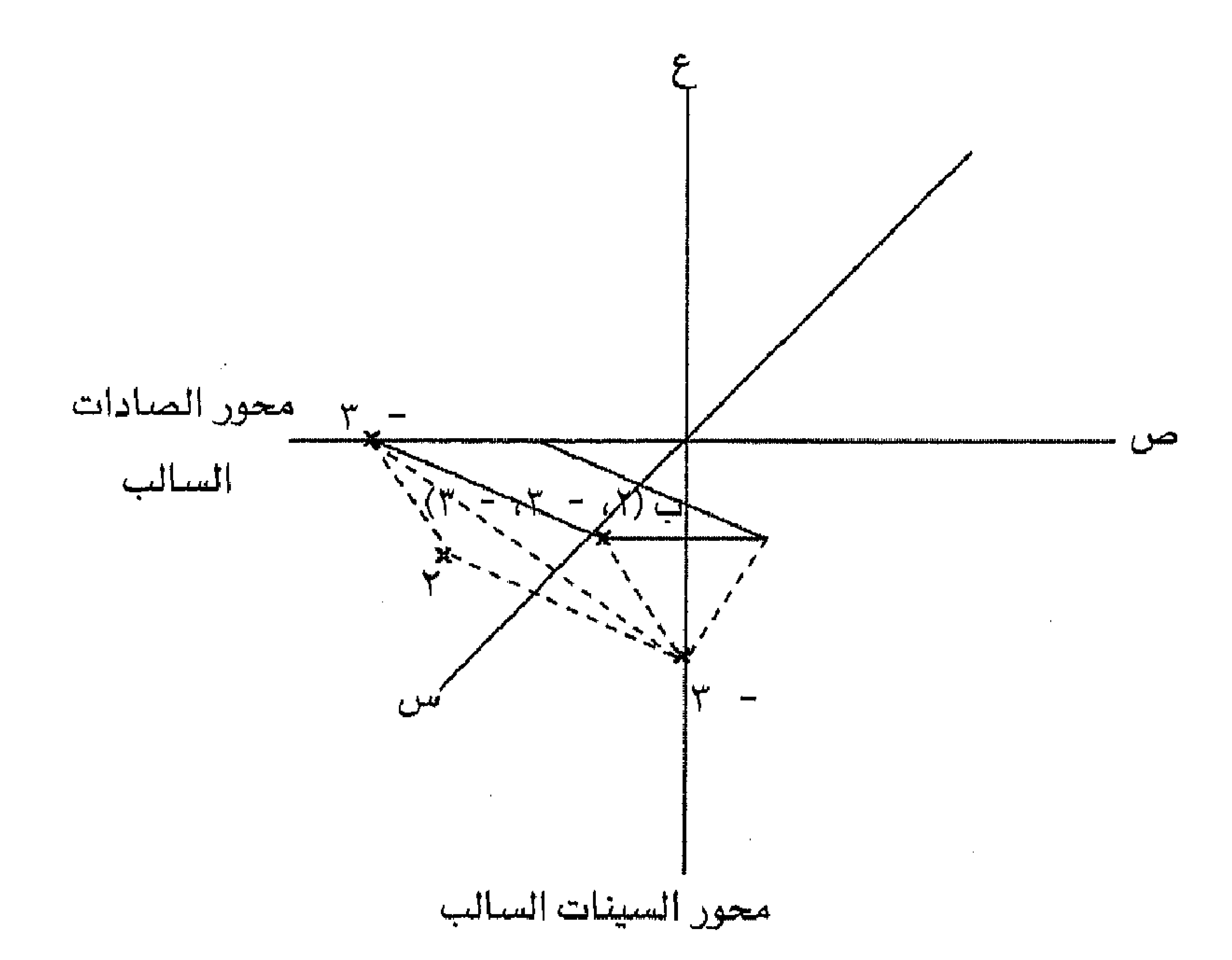
$أ_١$

س

⇦مثال: عين النقطة ب (٤، ١، ٣) في الفضاء



⇦مثال: عين النقطة جـ (٢، - ٣، - ٣) في الفضاء



ثم ثانياً علينا أن نعرض بإيجاز شديد بعض المفاهيم على شكل معادلات أو قواعد أو قوانين كما يلي:

(١) المسافة بين نقطتين في الفضاء

إذا كانت أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$) ، ب ($ب_١$، $ب_٢$، $ب_٣$) نقطتان في الفضاء

فإن أ ب = $\sqrt{(أ_١ - ب_١)^٢ + (أ_٢ - ب_٢)^٢ + (أ_٣ - ب_٣)^٢}$

⇦مثال: احسب المسافة بين النقطتين أ (٣، −١، ٢)، ب (٤، ١، −٥)

أ ب = $\sqrt{(٣ - ٤)^٢ + (-١ - ١)^٢ + (٢ - -٥)^٢} = \sqrt{١ + ٤ + ٤٩}$

= $\sqrt{٥٤}$ = ٧,٣ تقريباً

⇦مثال: ما نوع المثلث الذي رؤوسه ل (١، ٢، ٣)، م (٤، ١، ٣)، ن (٤، ٦، ٤)

الحل: نجد أطوال أضلاعه ثم نقرر ما نوعه هكذا:

ل م = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٢ - ١)^٢ + (٣ - ٣)^٢} = \sqrt{٩ + ١} = \sqrt{١٠}$

م ن = $\sqrt{(٤ - ٤)^٢ + (١ - ٦)^٢ + (٣ - ٤)^٢} = \sqrt{٠ + ٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$

ل ن = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٢ - ٦)^٢ + (٣ - ٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦ + ١} = \sqrt{٢٦}$

فالمثلث متساوي الساقين وفيه | م ن | = | ل ن | = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

(٢) قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

إذا كانت أ ($أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$) ، ب ($ب_١$، $ب_٢$، $ب_٣$) نقطتان في الفضاء

فإن إحداثيات النقطة جـ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ هي

جـ ($\frac{أ_١ + ب_١}{٢}$ ، $\frac{أ_٢ + ب_٢}{٢}$ ، $\frac{أ_٣ + ب_٣}{٢}$)

⇦مثال: أوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

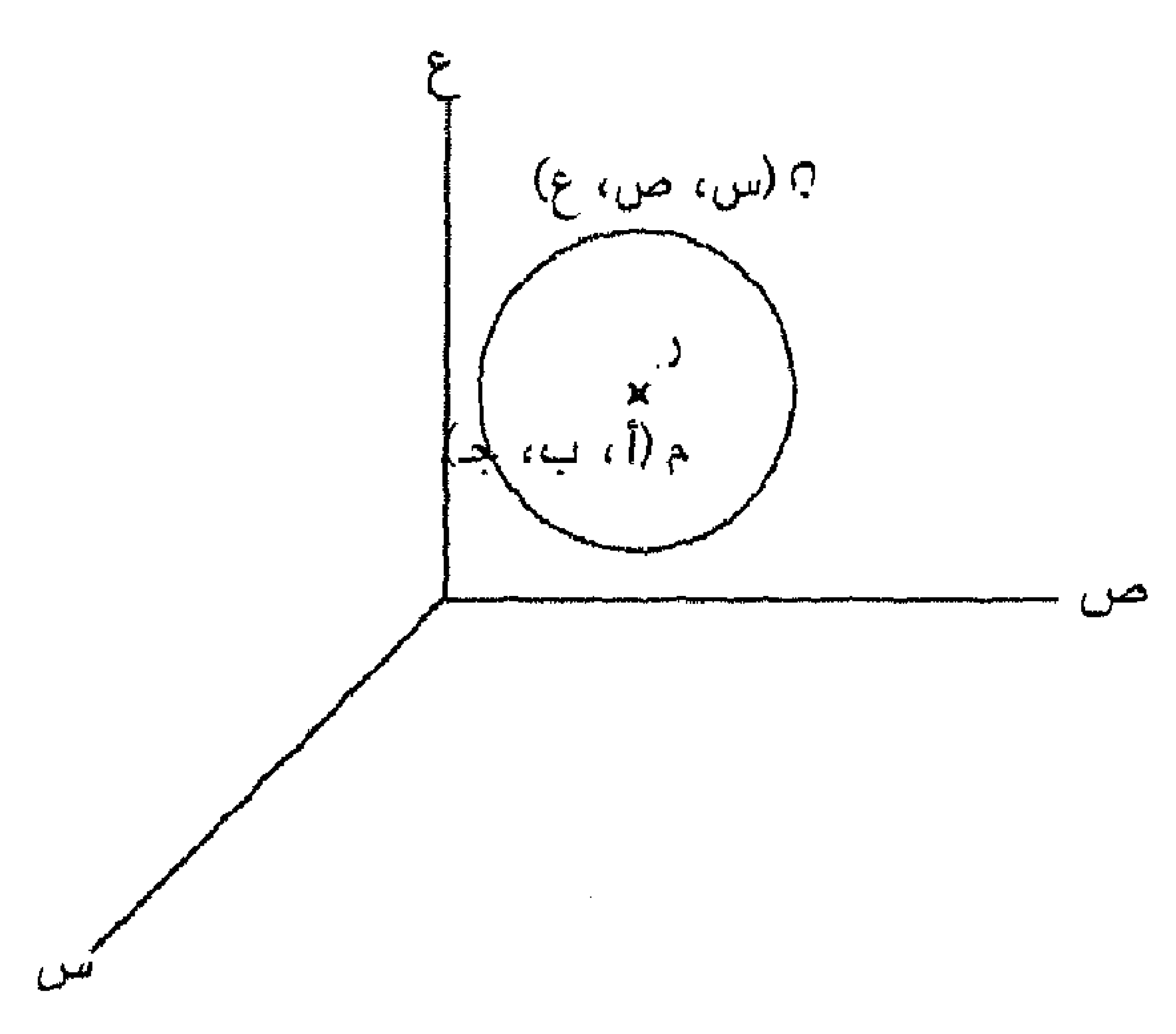
أ (−١، −٣، ١) ، ب (٣، ٤، −٢)

الحل: جـ ($\frac{-١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-٣ + ٤}{٢}$ ، $\frac{١ - ٢}{٢}$)

= جـ (١، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$)

(٣) معادلة الكرة:

تعرَّف الكرة بلغة المحل الهندسي بأنها: السطح الناتج عن حركة نقطة في الفضاء مثل ن حول نقطة ثابتة مثل م وعلى بعد ثابت منها ر وحدة طول وفي جميع الاتجاهات كما في الشكل



عندها تسمى النقطة الثانية مركز الكرة ويسمى المقدار الثابت ر نصف قطر الكرة افرض ن (س، ص، ع) ، م (أ، ب، جـ).

فمعادلة الكرة القياسية تكون؛ وحسب قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء وهما:

ن (س، ص، ع) ، المتحركة و م (أ، ب، جـ) الثانية حيث ن م = ر هي:

$$(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ + (ع - جـ)^٢ = ر^٢$$

وبعد فك الأقواس وترتيب النواتج تصبح الصورة القياسية لمعادلة الكرة كما يلي:

$$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢أس - ٢ب ص - ٢ جـ ع + أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ = ر^٢$$

$$\therefore س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢أس - ٢ب ص - ٢ جـ ع + أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ - ر^٢ = صفر$$

وبعد فرض ل = - أ ، ك = - ب، هـ = - جـ

فإن

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ك ص + ٢ هـ ع + s =$ صفر هي الصورة العامة

لمعادلة الكرة حيث مركزها م (- ل، - ك، - هـ)

نصف قطرها ر = $\sqrt{ل^2 + ك^2 + هـ^2 - ى}$ حيث ل، ك، هـ، ى ثوابت

ويمكن تحويل الصورة العامة إلى صورة قياسية بواسطة إكمال المربعات؛
إذا كان مركز الكرة هو نقطة الأصل م (٠، ٠، ٠)

فإن معادلتها العامة:

$س^2 + ص^2 + ع^2 = ر^2$ حيث ر نصف قطرها وهي الصورة العامة والقياسية في نفس الوقت.

⇦مثال: أوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٤سم.

المعادلة العامة والصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي:

$س^2 + ص^2 + ع^2 = ر^2$

أي أن $س^2 + ص^2 + ع^2 = (٤)^2$

ومنها $س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٦$

⇦مثال: أوجد (أ) معادلة الكرة التي مركزها م (٥، - ٣، ١) ونصف قطرها ر = ١ سم.

(ب) أوجد مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها: $س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦س + ٨ ص + ٤ ع + ٤ = صفر$.

حل (أ): الصورة القياسية:

$(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 + (ع - جـ)^2 = ر^2$

$(س - ٥)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع - ١)^2 = ١$ وهذه الصورة القياسية لمعادلة الكرة

وبعد التبسيط

$س^2 - ١٠س + ٢٥ + ص^2 + ٦ص + ٩ + ع^2 - ٢ع + ١ = ١$

$س^2 + ص^2 + ع^2 - ١٠س + ٦ص - ٢ع + ٣٤ = صفر$ وهذه المعادلة العامة للكرة.

حل (ب) المعادلة

$س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦س + ٨ص + ٤ع + ٤ = صفر$

نحولها إلى الصورة القياسية بواسطة إكمال المربعات هكذا:

$(س^2 - ٦س) + (ص^2 + ٨ص) + ٩ (ع^2 - ٤ع) = - ٤$

وبإضافة مربع نصف معامل المتغير لكل طرف كما يلي:

$(س^2 - ٦س + ٣^2) + (ص^2 + ٨ص + ٤^2) + (ع^2 - ٤ع + ٢^2)$

$= ٤ + ٣^2 + ٤^2 + ٢^2$

$(س - ٣)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع + ٢)^2 = ٢٥$

مطابقتها بالصورة القياسية

$(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 + (ع - جـ)^2 = ر^2$

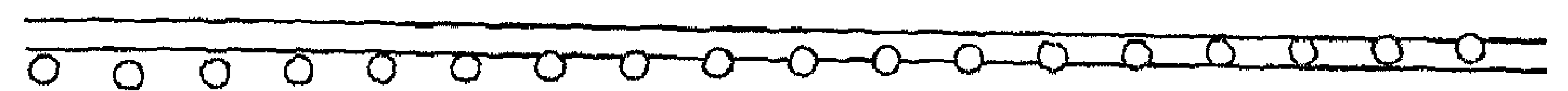
فالمركز م (٣، - ٤، - ٢)، نصف القطر $ر = \sqrt{٢٥} = ٥$ سم

والآن سنناقش جبر المتجهات في الفضاء

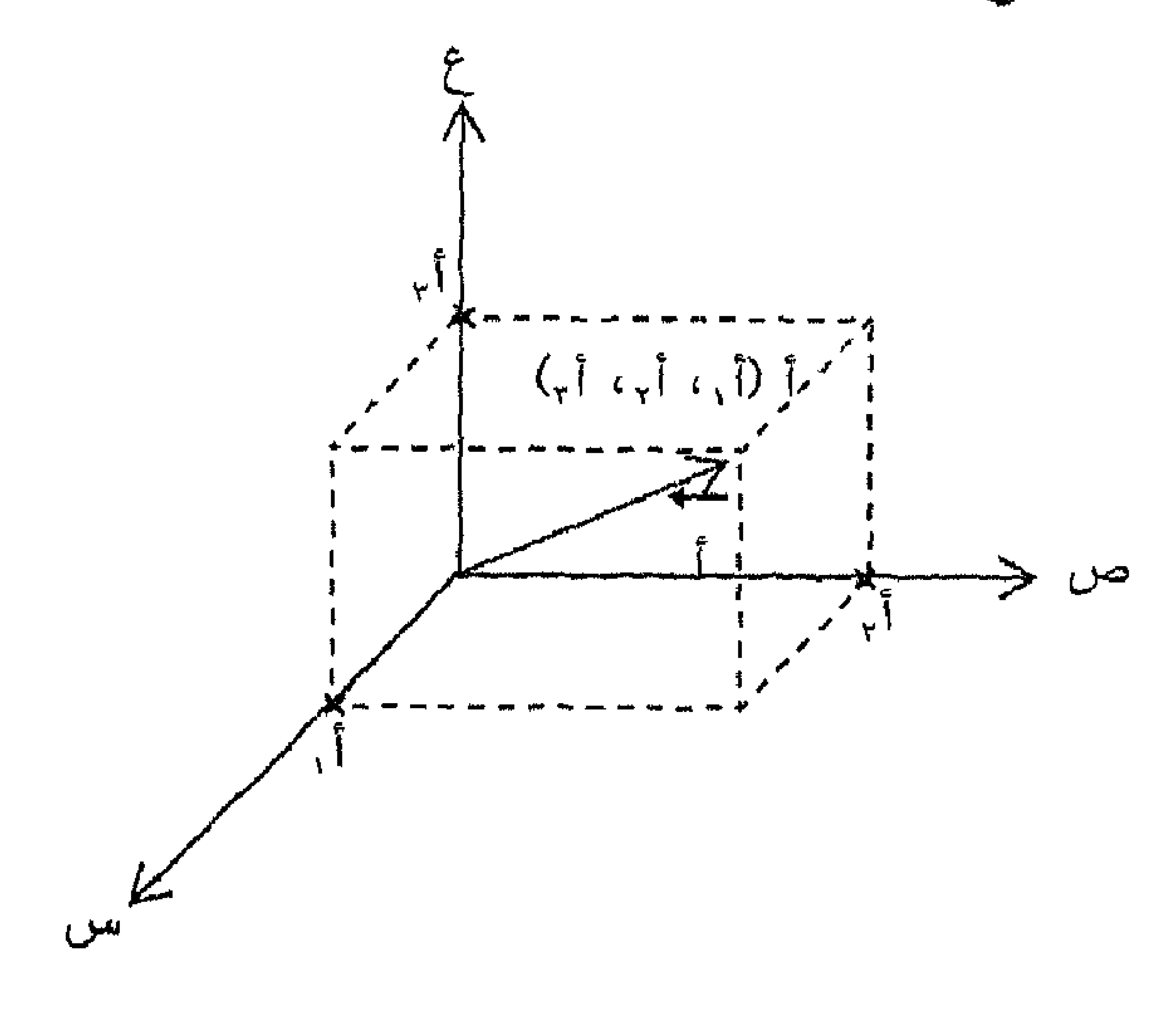
لتمثيل المتجهات في الفضاء يلزمنا متجهات الوحدة وهي ثلاث:

$\overleftarrow{و_1} = (١، ٠، ٠)$، $\overleftarrow{و_2} = (٠، ١، ٠)$، $\overleftarrow{و_3} = (٠، ٠، ١)$ وتمثل في الفضاء

على نظام الإحداثيات ذي الثلاثة أبعاد كما في الشكل.



هذا وتشكل متجهات الوحدة $\overleftarrow{و}_1$ ، $\overleftarrow{و}_2$ ، $\overleftarrow{و}_3$ ما يسمى أساس المتجهات في الفضاء، والتفسير أن كل متجه في الفضاء مثل $\overleftarrow{أ}$ فإنه يمثل بدلالة متجهات الوحدة تلك وعلى الصورة $\overleftarrow{أ}$ = $أ_1 \, و_1 + أ_2 \, و_2 + أ_3 \, و_3$ حيث $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ مركبات المتجه أ كما هو واضح بالشكل.



هذا وجميع المفاهيم والمصطلحات والقوانين والعمليات التي درست على المتجهات في المستوى، تُعمم الآن وبصورة مباشرة على المتجهات في الفضاء، كما يلي:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = $أ_1 \, و_1 + أ_2 \, و_2 + أ_3 \, و_3$

$\overleftarrow{ب}$ = $ب_1 \, و_1 + ب_2 \, و_2 + ب_3 \, و_3$

فإن:

(١) $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب}$ فقط إذا $أ_{١} = ب_{١}$، $أ_{٢} = ب_{٢}$، $أ_{٣} = ب_{٣}$

(٢) طول المتجه $\overleftarrow{أ} = \left| \overleftarrow{أ} \right| = \sqrt{أ_{١}^{٢} + أ_{٢}^{٢} + أ_{٣}^{٢}}$

طول المتجه $\overleftarrow{ب} = \left| \overleftarrow{ب} \right| = \sqrt{ب_{١}^{٢} + ب_{٢}^{٢} + ب_{٣}^{٢}}$

(٣) جمع المتجهات:

$$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢} + أ_{٣}و_{٣}) + (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢} + ب_{٣}و_{٣})$$

$$= (أ_{١} + ب_{١})و_{١} + (أ_{٢} + ب_{٢})و_{٢} + (أ_{٣} + ب_{٣})و_{٣}$$

(٤) وكذلك طرح المتجهات:

$$\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢} + أ_{٣}و_{٣}) - (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢} + ب_{٣}و_{٣})$$

$$= (أ_{١} - ب_{١})و_{١} + (أ_{٢} - ب_{٢})و_{٢} + (أ_{٣} - ب_{٣})و_{٣}$$

(٥) وكذلك $م\,\overleftarrow{أ} = م(أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢} + أ_{٣}و_{٣}) = م\,أ_{١}و_{١} + م\,أ_{٢}و_{٢} + م\,أ_{٣}و_{٣}$

الضرب بعدد معين وكذلك $م\,\overleftarrow{ب} = م\,ب_{١}و_{١} + م\,ب_{٢}و_{٢} + م\,ب_{٣}و_{٣}$

حيث م عدد حقيقي، أي $م \in ح$.

(٦) إذا كان $\overleftarrow{أ} = أ_{١}و_{١} + أ_{٢}و_{٢} + أ_{٣}و_{٣}$

$$\overleftarrow{ب} = ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢} + ب_{٣}و_{٣}$$

فإن $\overleftrightarrow{أب} = ب - أ = (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢} + ب_{٣}و_{٣}) - (ب_{١}و_{١} + ب_{٢}و_{٢} + ب_{٣}و_{٣})$

$$= (ب_{١} - أ_{١})و_{١} + (ب_{٢} - أ_{٢})و_{٢} + (ب_{٣} - أ_{٣})و_{٣}$$

⇦مثال: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣}$

$\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\text{و}_{١} - ٢\text{و}_{٢} - \text{و}_{٣}$

فإن $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣} + ٢\text{و}_{١} - ٢\text{و}_{٢} - \text{و}_{٣}$

$= ٣\text{و}_{١} - \text{و}_{٢}$

وكذلك $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣}) + (٢\text{و}_{١} - ٢\text{و}_{٢} - \text{و}_{٣})$

$= (\text{و}_{١} - ٢\text{و}_{١}) + (\text{و}_{٢} + ٢\text{و}_{٢}) + (\text{و}_{٣} + \text{و}_{٣})$

$= -\text{و}_{١} + ٣\text{و}_{٢} + ٢\text{و}_{٣}$

$٢\overleftarrow{\text{أ}} = ٢(\text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣})$

$= ٢\text{و}_{١} + ٢\text{و}_{٢} + ٢\text{و}_{٣}$

$|\overleftarrow{\text{ب}}| = \sqrt{(٢)^{٢} + (-٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٤ + ٤ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

وكذلك $|\overleftarrow{\text{أ}}| = \sqrt{(١)^{٢} + (١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٣} = ١,٧$ تقريباً.

⇦مثال: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{و}_{١} - ٤\text{و}_{٢} + ٥\text{و}_{٣}$

$\overleftarrow{\text{ب}} = -٣\text{و}_{١} + ٤\text{و}_{٢}$

$\overleftarrow{\text{ج}} = -٢\text{و}_{٢}$

أوجد قيم الأعداد الحقيقية ل، م، ن علماً بأن:

$\text{ل}\,\overleftarrow{\text{أ}} + \text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}} + \text{ن}\,\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{و}_{٣}}$

$\text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}} = -٣\text{م}\,\text{و}_{١} + ٤\text{م}\,\text{و}_{٢}$

$\overleftarrow{ن ج} = -٢ ن و_٣$

وبعد الترتيب: ل $و_١$ − ٣ م $و_١$ = (ل − ٣م) $و_١$

− ٤ ل $و_٣$ + ٤ م $و_٣$ − ٢ ن $و_٣$ = (− ٤ ل + ٤ م − ٢ ن) $و_٣$

٥ ل $و_٣$ = (٥) ل $و_٣$

الطرف الأيسر $\overleftarrow{و}$ = (٠، ٠، ١)

أي أن ل − ٣م = صفر ⟵ المسقط الأول

وكذلك − ٤ ل + ٤ م − ٢ ن = صفر ⟵ المسقط الثاني

وكذلك ٥ ل = ١ ⟵ المسقط الثاني

وبعد حل المعادلات فإن:

ل = $\frac{١}{٥}$ ، م = $\frac{١}{١٥}$ ، ن = $\frac{-٤}{١٥}$

⇦مثال: إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = $و_١$ − ٣$و_٣$

$\overleftarrow{ب}$ = ٢$و_١$ + ٥$و_٣$

$\overleftarrow{ج}$ = ٣$و_١$ − ٤$و_٣$

أوجد المتجه $\overleftarrow{س}$ الذي يحقق المعادلة:

٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٣ $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{ج}$ − ٢ $\overleftarrow{ب}$ + ٤ $\overleftarrow{س}$

− ٢ $\overleftarrow{أ}$ − ٢ $\overleftarrow{أ}$

---

٣ $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{ج}$ − ٢ $\overleftarrow{ب}$ − ٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٤ $\overleftarrow{س}$

− ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{س}$

$-(-\overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - ٢\overleftarrow{\text{ب}} - ٢\overleftarrow{\text{أ}})$

$\overleftarrow{\text{س}} = ٢\overleftarrow{\text{أ}} + ٢\overleftarrow{\text{ب}} + ٢\overleftarrow{\text{جـ}}$

$= ٢(\text{و}_{١} - ٣\text{و}_{٣}) + ٢(٢\text{و}_{١} + ٥\text{و}_{٣}) - (٣\text{و}_{١} - ٤\text{و}_{٣})$

$= ٢\text{و}_{١} - ٦\text{و}_{٣} + ٤\text{و}_{١} + ١٠\text{و}_{٣} - ٣\text{و}_{١} + ٤\text{و}_{٣}$

$= ٣\text{و}_{١} - ٦\text{و}_{٣} + ٤\text{و}_{١} + ١٤\text{و}_{٣}$

$\therefore \overleftarrow{\text{س}} = ٣\text{و}_{١} - ٦\text{و}_{٣} + ٤\text{و}_{١} + ١٤\text{و}_{٣}$

(١٦ — ٣) الضرب الداخلي Inner Product

ويسمى أحياناً الضرب النقطي Dot Product ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ ويعرّف هكذا:

إن حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ هو العدد الحقيقي الناتج عن: $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}|$ جتا هـ حيث $\measuredangle$ هـ هي الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين.

ويسمى بالضرب الداخلي لأنه لا ينتج متجهات من نفس نوع الكميات المضروبة بل أعداد حقيقية.

⇦ مثال: إذا كان $|\overleftarrow{\text{أ}}| = ٦$ ، $|\overleftarrow{\text{ب}}| = ٥$

والزاوية هـ بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، تساوي ١٢٠° فإن:

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = (٦)(٥)$ جتا $١٢٠^{\circ} = (٦)(٥)(-\frac{١}{٢}) = -١٥$

«لأن جتا ١٢٠° = جتا $(١٨٠ - ٦٠)$ = جتا $٦٠^{\circ} = -\frac{١}{٢}$ »

أي أن حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = -15$ وهذا عدد حقيقي ومن هذا التعريف يمكن استنتاج أن:

(١) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}}$ الخاصية التبديلية

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}} = (|\overleftarrow{\text{أ}}|)^2$ لأن الزاوية بين المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ونفسه تساوي صفراً وجتا صفر = ١

(٣) إذا كان م عدداً حقيقياً فإن:

$(\text{م}\ \overleftarrow{\text{أ}}) \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \cdot (\text{م}\ \overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}\ (\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}})$

(٤) $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}}) = \overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{جـ}}$ الخاصية التوزيعية

(٥) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \neq \overleftarrow{\text{صفر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} \neq \overleftarrow{\text{صفر}}$ فإن

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ = صفر إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ يعامد $\overleftarrow{\text{ب}}$

كون الزاوية $\measuredangle = \frac{\pi}{2}$

أي أن $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = |\overleftarrow{\text{أ}}|\,|\overleftarrow{\text{ب}}| \cdot \text{جتا}\ \frac{\pi}{2} = |\overleftarrow{\text{أ}}| \cdot |\overleftarrow{\text{ب}}| \times$ صفر

= صفر

⇦ مثال: احسب حاصل الضرب الداخلي لكل متجهين من متجهات الوحدة وكذلك كل قيمة بنفسه:

$\overleftarrow{\text{و}_1} \cdot \overleftarrow{\text{و}_2} = |\overleftarrow{\text{و}_1}|\,|\overleftarrow{\text{و}_2}|$ جتا 90° كونها متعامدان

$= |\overleftarrow{\text{و}_1}|\,|\overleftarrow{\text{و}_2}| \times$ صفر = صفر

وكذلك $\overleftarrow{\text{و}_1} \cdot \overleftarrow{\text{و}_3}$ = صفر

وكذلك $\overleftarrow{\text{و}_2} \cdot \overleftarrow{\text{و}_3}$ = صفر

كون الزاوية بين كل اثنين منها تساوي °٩٠ كما في الشكل

لكن $\overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_١} = |\overleftarrow{و_١}| \, |\overleftarrow{و_١}| \times$ جتا صفر $= |\overleftarrow{و_١}| \, |\overleftarrow{و_١}| \times ١$

لكن $|\overleftarrow{و_١}| = \sqrt{(١)^٢ + (٠)^٢ + (٠)^٢} = ١$ وهكذا طول كل المتجهات الوحدة.

$$|\overleftarrow{و_١}| = ١ ، \quad |\overleftarrow{و_٢}| = ١ ، \quad |\overleftarrow{و_٣}| = ١$$

وهذا المثال يعطي النتيجة التالية وبشكل عام:

إن حاصل ضرب أي متجهين من متجهات الوحدة = صفر

وإن حاصل ضرب أي متجه من متجهات الوحدة بنفسه = ١

وبالرموز: $\overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_٢} = \overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_٢} = \overleftarrow{و_٣} . \overleftarrow{و_١} =$ صفر

ولكن: $\overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_١} = \overleftarrow{و_٢} . \overleftarrow{و_٢} = \overleftarrow{و_٣} . \overleftarrow{و_٣} = ١$

وهناك صيغة أخرى للضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء بدلالة مركباتهما كما يلي:

إذا كان $\overleftarrow{أ} = أ_١ و_١ + أ_٢ و_٢ + أ_٣ و_٣$

$\overleftarrow{ب} = ب_١ و_١ + ب_٢ و_٢ + ب_٣ و_٣$

فإن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = (أ_١ و_١ + أ_٢ و_٢ + أ_٣ و_٣)(ب_١ و_١ + ب_٢ و_٢ + ب_٣ و_٣)$

وبعد الضرب والتجميع مع اعتبار أن $و_١ و_١ = و_٢ و_٢ = و_٣ و_٣ = ١$

وكذلك $و_١ و_٢ = و_٢ و_٣ = و_٣ و_١ =$ صفر كما أعلاه ينتج أن:

$(\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣ =$ عدد حقيقي وليس متجهاً)

⇐مثال: $\overleftarrow{أ} = ٢و_١ + ٤و_٢ - ٣و_٣$

$\overleftarrow{ب} = -و_١ + ٥و_٢ + ٢و_٣$

فإن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = (٢)(-١) + (٤)(٥) + (-٣)(٢)$

$= -٢ + ٢٠ - ٦ = ١٢ \in ح.$

والآن جاء الوقت لربط قاعدتي الضرب الداخلي مع بعضها البعض:

بما أن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}|$ جتا هـ كما مر سابقاً

وإن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣$ كما مر سابقاً أيضاً.

فإن $|\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}|$ جتا هـ $= أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣$

ومنها: جتا هـ $= \frac{أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|}$

$$= \frac{(١)(-١) + (٠)(-١) + (٠)(١)}{\sqrt{١^٢ + ١^٢} \times \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}}$$

$$= \frac{-١}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{-١}{٢}$$

$$\therefore \measuredangle \text{ جتا هـ} = \frac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|}$$

كون $\overleftarrow{أ} \; \overleftarrow{ب} = أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

ماذا يستفاد من معرفة قياس الزاوية بين متجهين مثل $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ على سبيل المثال ؟

والجواب باختصار هو نستطيع معرفة قيمها إذا كان المتجهان متوازيين أو

متعامدين، وهكذا:

أولاً: إذا كان قياس الزاوية هـ بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوي صفراً أو ١٨٠° فالمتجهين متوازيين.

أي عندما ينتج أن جتا هـ = ± ١

كون جتا صفر = ١، وكون جتا ١٨٠° = - ١

أي أن شرط توازي المتجهين هو جتا هـ = ± ١

ثانياً: إذا كان قياس الزاوية هـ بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوي ٩٠° فالمتجهين متعامدين.

كون جتا ٩٠° = صفر

أي أن شرط تعامد المتجهات هو $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = صفر

لأن جتاهـ = $\dfrac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|} = \dfrac{\text{صفر}}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|}$ = صفر

⇦مثال: إذا كان $|\overleftarrow{أ}|$ = ٨ ، $|\overleftarrow{ب}|$ = ١٢ وقياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوي ٤٥° احسب $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$

الحل: بما أ، جتاهـ = $\dfrac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|}$

فإن جتا ٤٥° = $\dfrac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| . |\overleftarrow{ب}|}$

أي أن $\dfrac{١}{\sqrt{٢}} = \dfrac{\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}}{١٢ \times ٨}$

وبالضرب التبادلي: $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \frac{٩٦}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٩٦\sqrt{٢}}{٢}$

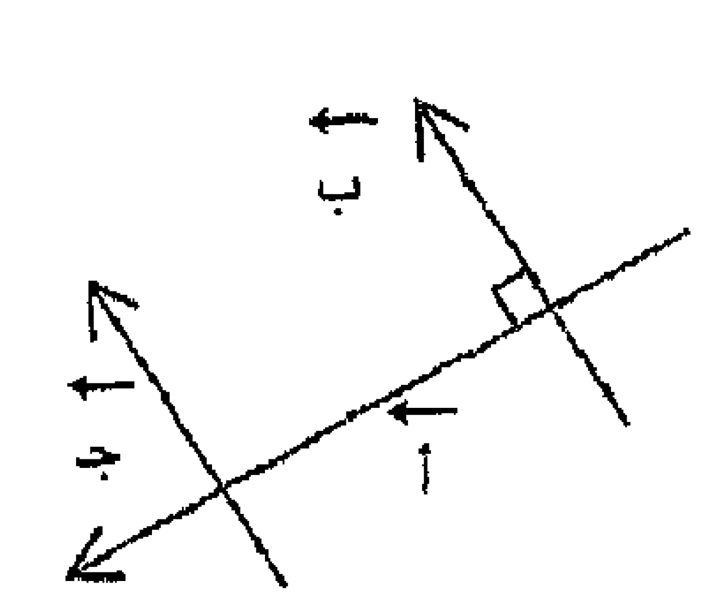
$= ٤٨\sqrt{٢}$ كعدد حقيقي

⇦مثال: جد قيم س، ص بحيث يكون المتجه $\overleftarrow{أ} = س\,و_١ + ص\,و_٢ + و_٣$

عمودياً على كل من المتجهين $\overleftarrow{ب} = ٣و_١ + و_٢ - و_٣$

$\overleftarrow{جـ} = -٣و_١ + ٢و_٢ - ٢و_٣$

لنأخذ المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متعامدان



∴ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ = صفر

أي أن ٣س + ص − ١ (١) = صفر

أو ٣س + ص = ١ معادلة (١)

ولنأخذ المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ متعامدان

∴ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{جـ}$ = صفر

أي أن (− ٣) س + ٢ ص + ٢ (١) = صفر

أي أن − ٣ س + ٢ ص = − ٢ معادلة (٢)

وبحل المعادلتين:

٣س + ص = ١ (١)

− ٣ س + ٢ ص = − ٢ (٢)

---

٣ ص = − ١

ص = $\frac{-١}{٣}$

وبالتعويض:

$$٣س + \left(\frac{-١}{٣}\right) = ١$$

$$٣ س = ١ \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

وبالضرب التبادلي: ٩س = ٤

$$س = \frac{٤}{٩}$$

فالقيم: $س = \frac{٤}{٩}$ ، $ص = -\frac{١}{٣}$

(١٦ – ٤) الضرب المتجهي Vactor Product

ويسمى الضرب التقاطعي Cross Product ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

ويعرف هكذا:

إذا كان $\overleftarrow{أ} = أ_{١} و_{١} + أ_{٢} و_{٢} + أ_{٣} و_{٣}$

$\overleftarrow{ب} = ب_{١} و_{١} + ب_{٢} و_{٢} + ب_{٣} و_{٣}$

وباستخدام المحددات Determinants

فإن الضرب المتجهي للمتجهين $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ يعطى بالقاعدة:

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_{١} & و_{٢} & و_{٣} \\ أ_{١} & أ_{٢} & أ_{٣} \\ ب_{١} & ب_{٢} & ب_{٣} \end{vmatrix}$$

$$= و_{١} \begin{vmatrix} أ_{٢} & أ_{٣} \\ ب_{٢} & ب_{٣} \end{vmatrix} - و_{٢} \begin{vmatrix} أ_{١} & أ_{٣} \\ ب_{١} & ب_{٣} \end{vmatrix} + و_{٣} \begin{vmatrix} أ_{١} & أ_{٢} \\ ب_{١} & ب_{٢} \end{vmatrix}$$

$= و_1 (أ_2 ب_3 - أ_3 ب_2) - و_2 (أ_1 ب_3 - ب_1 أ_3) + و_3 (أ_1 ب_1 - أ_2 ب_1)$

ويسمى باسم الضرب المتجهي لأنه ينتج متجه بدلالة متجهات الوحدة ولا يُنصح بحفظ النتيجة لأن طريقة الحل واضحة.

⇦مثال: إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٢ و_1 - و_2 + ٦ و_3$

$\overleftarrow{ب} = - ٣ و_1 + ٥ و_2 + ١ و_3$

أوجد $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_1 & و_2 & و_3 \\ ٢ & -١ & ٦ \\ -٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

$= و_1 \begin{vmatrix} -١ & ٦ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - و_2 \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + و_3 \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{vmatrix}$

$= و_1 (-١ - ٣٠) - و_2 (٢ + ١٨) + و_3 (١٠ - ٣)$

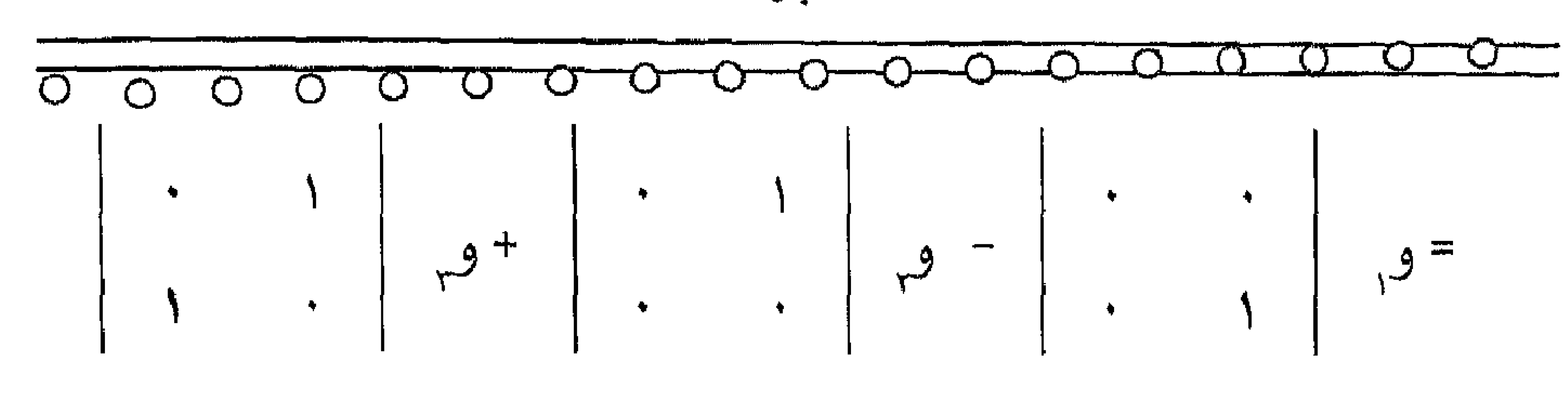
$= - ٣١ و_1 - ٢٠ و_2 + ٧ و_3$ وهذا عدد حقيقي.

⇦مثال: احسب $و_1 \times و_2$ ، $و_2 \times و_3$ ، $و_3 \times و_1$ (حاصل ضرب متجهين) ثم احسب $و_1 \times و_1$ ، $و_2 \times و_2$ ، $و_3 \times و_3$ (حاصل ضرب المتجه في نفسه).

حيث $و_1 = (١، ٠، ٠)$ ، $و_2 = (٠، ١، ٠)$ ، $و_3 = (٠، ٠، ١)$

الحل:

$و_1 \times و_2 = \begin{vmatrix} و_1 & و_2 & و_3 \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$



$$= و_{١} \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - و_{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} + و_{٣} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

= $و_{١}$ (صفر) – $و_{٢}$ (صفر) + $و_{٣}$ (١) = $و_{٣}$

وكذلك $و_{٢} \times و_{٣} = و_{١}$ ، وكذلك $و_{١} \times و_{٣} = و_{٢}$

لكن $و_{٢} \times و_{١} = - و_{٣}$ ، وكذلك $و_{٣} \times و_{٢} = - و_{١}$ ، وكذلك $و_{٣} \times و_{١} = - و_{٢}$

لكن $و_{١} \times و_{١} = \begin{vmatrix} و_{١} & و_{٢} & و_{٣} \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$$= و_{١} \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} - و_{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + و_{٣} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

= $و_{١}$ (صفر) – $و_{٢}$ (صفر) + $و_{٣}$ (صفر) = صفر

وكذلك $و_{٢} \times و_{٢}$ = صفر، $و_{٣} \times و_{٣}$ = صفر

وباختصار:

«الضرب المتجهي لمتجهين من متجهات الوحدة = ± المتجه الثالث، والضرب المتجهي لمتجه في نفسه = صفر»

وللضرب المتجهي الخصائص التالية:

■ للمتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ج}$ ، م ∋ ح فإن:

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = - \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ ليس تبديلي

(٢) $\overleftarrow{أ} \times (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{ج}) = \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ج}$ توزيعي

(٣) لكل م $\in$ ح فإن :

$(م \overleftarrow{أ}) \times \overleftarrow{ب} = م(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}) = \overleftarrow{أ} \times (م \overleftarrow{ب})$

(٤) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{أ} = $ صفر

▪ أما طول المتجه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ والذي يرمز له بالرمز $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$ وعلامته بكل من المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ فتحدده العلاقة التالية :

$|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ حيث هـ الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

⇦ مثال: إذا كان $\overleftarrow{أ} = و_١ - و_٢$، $\overleftarrow{ب} = و_٢ + و_٣$ وكانت الزاوية بين المتجهين هـ = ١٢٠° احسب طول المتجه $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$.

الحل بطريقتين: الأولى:

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_١ & و_٢ & و_٣ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$= و_١(-١) - و_٢(١) + و_٣(١)$

$= -و_١ - و_٢ + و_٣$

$\therefore |\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = \sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢ + (١)^٢}$

$= \sqrt{١+١+١} = \sqrt{٣}$

الثانية: $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ

$= \left(\sqrt{(١)^٢ + (-١)^٢}\right)\left(\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}\right)$ جا١٢٠°

= ($\sqrt{2}$) ($\sqrt{2}$) جا٦٠ (جا١٢٠ = جا (١٨٠ − ٦٠) = جا ٦٠)

= $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

= $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

الجواب في الطرفين نفسه.

إن شرط توازي المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ هو | $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ | = صفر

حيث | $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ | = | $\overleftarrow{أ}$ | . | $\overleftarrow{ب}$ | جاصفر = | $\overleftarrow{أ}$ | | $\overleftarrow{ب}$ | × صفر

= صفر

أي عندما تكون الزاوية هـ بين المتجهين صفر° ، π ، ١٨٠°

وبالرموز

$\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ إذا وفقط إذا $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ = صفر شرط $\overleftarrow{أ}$ ≠ صفر، $\overleftarrow{ب}$ ≠ صفر ويتحقق ذلك عندما تكون الزاوية بين المتجهين { صفر°، ١٨٠° }.

ولا تنس شرط التعامد بالرموز.

$\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = صفر

ملحوظة مهمة جداً:

$\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ ⟵ $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ = صفر ضرب متجهي (تقاطعي).

$\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ ⟵ $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = صفر ضرب داخلي (نقطي).

⇦مثال: احسب قياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين

$\overleftarrow{أ}$ = ٢ و$_1$ − ٦ و$_2$ + ٣ و$_3$

$\overleftarrow{ب}$ = − ٤ و$_3$

الحل بطريقتين:

الأولى: جتاهـ = $\frac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|}$ الضرب الداخلي

جتا هـ = $\frac{أ_1 ب_1 + أ_2 ب_2 + أ_3 ب_3}{\left(\sqrt{4 + 36 + 9}\right) \times \left(\sqrt{16}\right)}$ = $\frac{\text{صفر} + 24 + \text{صفر}}{7 \times 4}$

= $\frac{24}{28}$ = $\frac{6}{7}$ = ٠,٨٥٧١

∴ ∢ هـ = ٣١° تقريباً.

الثانية: $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ الضرب المتجهي فإن:

جا هـ = $\frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| \cdot |\overleftarrow{ب}|}$

نجد أولاً $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_1 & و_2 & و_3 \\ 2 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

= $و_1 (0 - -12) - و_2 (0 - 0) + و_3 (-8 - 0)$

= $12 و_1 - 8 و_3$

ومنه $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208}$

أي أن جاهـ = $\frac{\sqrt{208}}{\sqrt{4 + 36 + 9} \times \sqrt{16}}$

= $\frac{\sqrt{208}}{\sqrt{49} \times \sqrt{16}}$ = $\frac{\sqrt{208}}{7 \times 4}$ = $\frac{2\sqrt{52}}{7 \times 4}$ = $\frac{\sqrt{52}}{14}$

= $\frac{7.211}{14}$ = ٠,٥١٥١

∴ ∡ هـ = ٣١° تقريباً.

فالزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ هي ٣١° بعد الحل بطريقتين.

ومن أشهر التطبيقات الهندسية على الضرب المتجهي هو إيجاد مساحة متوازي أضلاع ومساحة مثلث في الفضاء وبلا مقدمات يمكننا التفسير كما يلي:

ليكن $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين في الفضاء ولتكن الزاوية المحصورة بينهما هي الزاوية هـ، تكون متوازي الأضلاع على أن يكون $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ممثلين لضلعين متجاورين فيه كما في الشكل.

وبما أن مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع (هندسة مستوية)

فإن مساحة متوازي الأضلاع = $|\overleftarrow{أ}| \times \overleftarrow{ع}$ (حيث ع الارتفاع)

ولما كان جا هـ = $\frac{ع}{|\overleftarrow{ب}|}$ ($\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ في المثلث القائم الزاوية)

وبالضرب التبادلي ع = $|\overleftarrow{ب}|$. جاهـ

فإن مساحة متوازي الأضلاع = $|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ

لكن $|\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جاهـ = $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$ كما مر سابقاً

فإن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ كضلعين متجاورين

= $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$

⇦مثال: أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجهان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

حيث $\overleftarrow{أ} = ٥و_{١} - ٣و_{٢} + و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٢و_{١} + ٣و_{٢} - و_{٣}$

مساحة متوازي الأضلاع = $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}|$ =

$و_1$	$و_2$	$و_3$
٥	- ٢	١
٢	٣	- ١

= $و_1$ (صفر) — $و_2$ (- ٧) + $و_3$ (٢١) = ٧ $و_2$ + ٢١ $و_3$

وبما أن | $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ | = $\sqrt{(٧)^٢ + (٢١)^٢}$ = (طول المتجه)

= $\sqrt{٤٤١ + ٤٩}$ = $\sqrt{٤٩٠}$ = ٧ $\sqrt{١٠}$

= ٧ (٣,١٦٢) = ٢٢,١٣٤

∴ مساحة متوازي الأضلاع = ٢٢,١٣٤ سم^٢

وليس هذا فحسب بل يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي فيه المتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ كضلعين متجاورين، وحيث أن مساحة المثلث = نصف مساحة متوازي الأضلاع اللذان لهما نفس القاعدة.

« $\overleftarrow{أ}$ » والارتفاع «ع»

فإن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ | $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ | الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يمثلان أي ضلعين أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢٢,١٣٤ = ١١,٠٦٧ سم^٢

يمكن إيجاد مساحة المثلث مباشرة كونها = $\frac{١}{٢}$ | $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ | دون إيجاد مساحة متوازي الأضلاع أولاً.

وبشكل عام يمكن إيجاد مساحة المثلث أو متوازي الأضلاع إذا علمت رؤوس كلٍ منها كما في المثالين التاليين:

⇦ مثال ١: احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط التالية في الفضاء:

ن (٤، - ٣، ١)، ك (٦، - ٤، ٧)، ر (١، ٢، ٢)

الحل: تتكون من الضلعين المتجاورين ر ك، ر ن

المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ حيث

$\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ر ك}} = \text{ك} - \text{ر}$

(نحول النقط إلى متجهات بدلالة متجهات الوحدة)

$= (٦\,\text{و}_١ - ٤\,\text{و}_٢ + ٧\,\text{و}_٣) - (١\,\text{و}_١ + ٢\,\text{و}_٢ + ٢\,\text{و}_٣)$

$= ٥\,\text{و}_١ - ٦\,\text{و}_٢ + ٥\,\text{و}_٣$

وكذلك $\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر ن}} = \text{ن} - \text{ر} = (٤\,\text{و}_١ - ٣\,\text{و}_٢ + ١\,\text{و}_٣) - (١\,\text{و}_١ + ٢\,\text{و}_٢ + ٢\,\text{و}_٣) = ٣\,\text{و}_١ - ٥\,\text{و}_٢ - ١\,\text{و}_٣$

ومنها نجد
$$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{و}_١ & \text{و}_٢ & \text{و}_٣ \\ ٥ & -٦ & ٥ \\ ٣ & -٥ & -١ \end{vmatrix}$$

$= \text{و}_١ (٦ + ٢٥) - \text{و}_٢ (-٥ - ١٥) + \text{و}_٣ (-٢٥ - ١٨)$

$= ٣١\,\text{و}_١ + ٢٠\,\text{و}_٢ - ٧\,\text{و}_٣$

أي أن $\left| \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} \right| = \sqrt{(٣١)^٢ + (٢٠)^٢ + (٧)^٢}$

$= \sqrt{٩٦١ + ٤٠٠ + ٤٩} = \sqrt{١٤١٠} = ٣٧{,}٦$ تقريباً

$\therefore$ مساحة المثلث ك ر ن $= \frac{١}{٢} \left| \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} \right|$

$= (\frac{١}{٢})\,(٣٧{,}٦) = ١٨{,}٨$ سم^٢

مثال ٢ : احسب مساحة متوازي الأضلاع الذي رؤوسه النقط التالية في الفضاء.

ل (٥، ٠، ٠)، م (٢، ٦، ٦)، ن (٧، ٦، ٦) نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

نكون المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ كما يلي

ن (٧، ٦، ٦)

م (٢، ٦، ٦)

ل (٥، ٠، ٠)

و (٠، ٠، ٠)

$\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ول} =$ ل − و

$= (٥ و_١ + ٠ و_٢ + ٠ و_٣) - (٠ و_١ + ٠ و_٢ + ٠ و_٣)$

$= ٥ و_١ + ٠ و_٢ + ٠ و_٣$

$\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ون} = (٧ و_١ + ٦ و_٢ + ٦ و_٣) - (٠ و_١ + ٠ و_٢ + ٠ و_٣)$

$= ٧ و_١ + ٦ و_٢ + ٦ و_٣$

ومنه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_١ & و_٢ & و_٣ \\ ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٦ & ٦ \end{vmatrix}$

$= و_١ (٠) - و_٢ (٣٠) + و_٣ (٣٠)$

$= ٠ و_١ - ٣٠ و_٢ + ٣٠ و_٣$

ومنه $|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}| = \sqrt{٠^٢ + ٩٠٠ + ٩٠٠} = \sqrt{١٨٠٠}$

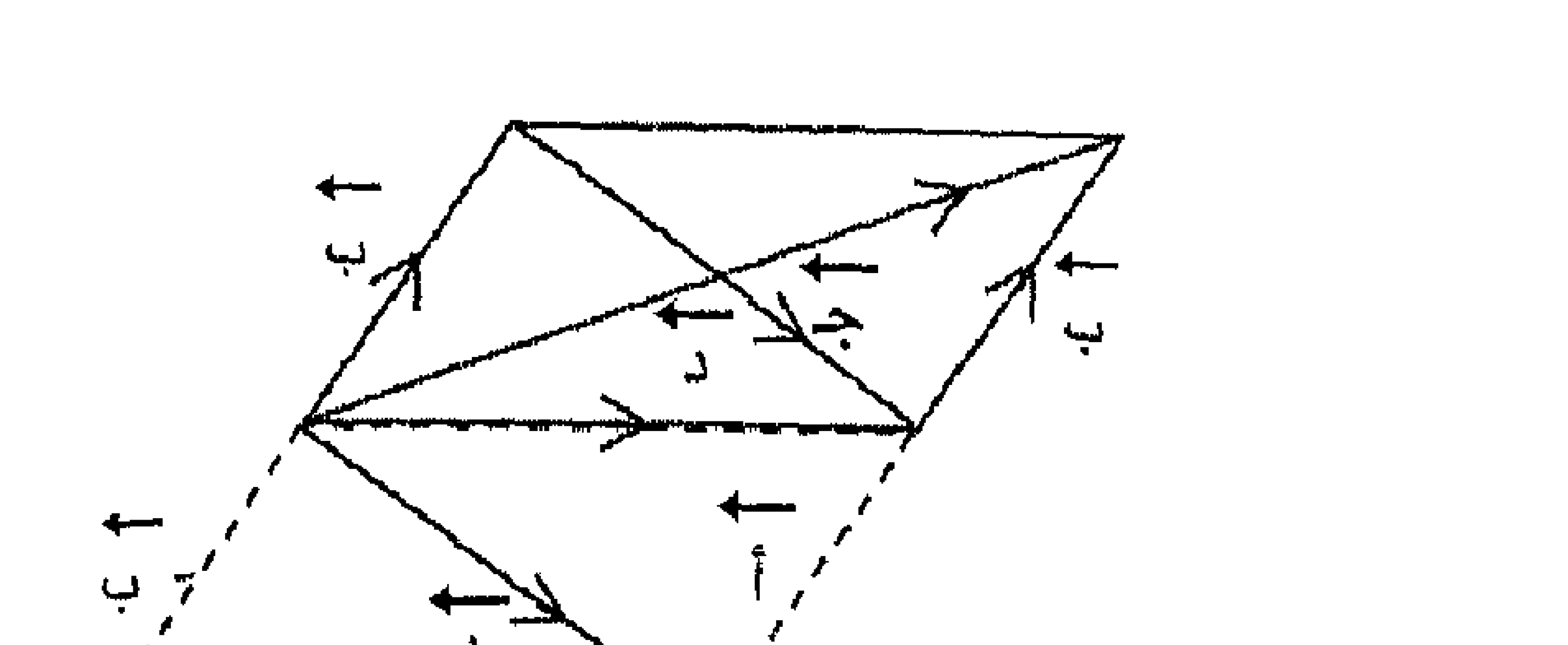
$= ٣٠ \sqrt{٢} = ٣٠ (١,٤١٤) = ٤٢,٤٢$ سم^٢

مساحة متوازي الأضلاع

⇦مثال: متوازى أضلاع قطراه ممثلان بالمتجهين

$\overleftarrow{ج} = -٢و_١ + ٣و_٢ + و_٣$

$\overleftarrow{د} = و_١ - ٥و_٢ + ٤و_٣$



احسب مساحته:

نحسب أولاً $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$:

$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ج}$ (قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات)

أي أن $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = -٢و_١ + ٣و_٢ + و_٣$ (١)

وكذلك $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ج}$ (قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات)

($-\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$) كما في الشكل.

$\therefore \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = و_١ - ٥و_٢ + ٤و_٣$ (٢)

وبحل المعادلتين بالحذف هكذا

$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = -٢و_١ + ٣و_٢ + و_٣$

$\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = و_١ - ٥و_٢ + ٤و_٣$

$٢\overleftarrow{أ} = -و_١ - ٢و_٢ + ٥و_٣$

ومنها $\overleftarrow{أ} = -\frac{١}{٢}و_١ - و_٢ + \frac{٥}{٢}و_٣$

لكن $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = -٢و_١ + ٣و_٢ + و_٣$

وبالتعويض:

$$-\frac{١}{٢}\,و_{١} - و_{٢} + \frac{٥}{٢}\,و_{٣} + \overleftarrow{ب} = -٢\,و_{١} + ٣\,و_{٢} + و_{٣}$$

$$\therefore\ \overleftarrow{ب} = -\frac{٣}{٢}\,و_{١} + ٤\,و_{٢} - \frac{٣}{٢}\,و_{٣}$$

والآن $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} و_{١} & و_{٢} & و_{٣} \\ -\frac{١}{٢} & -١ & +\frac{٥}{٢} \\ -\frac{٣}{٢} & +٤ & -\frac{٣}{٢} \end{vmatrix}$

$$= و_{١}\left(-\frac{١٧}{٢}\right) - و_{٢}\left(\frac{٩}{٢}\right) + و_{٣}\left(-\frac{١}{٢}\right)$$

ومنها $\left|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\right| = \sqrt{\left(-\frac{١٧}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{٩}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}}$

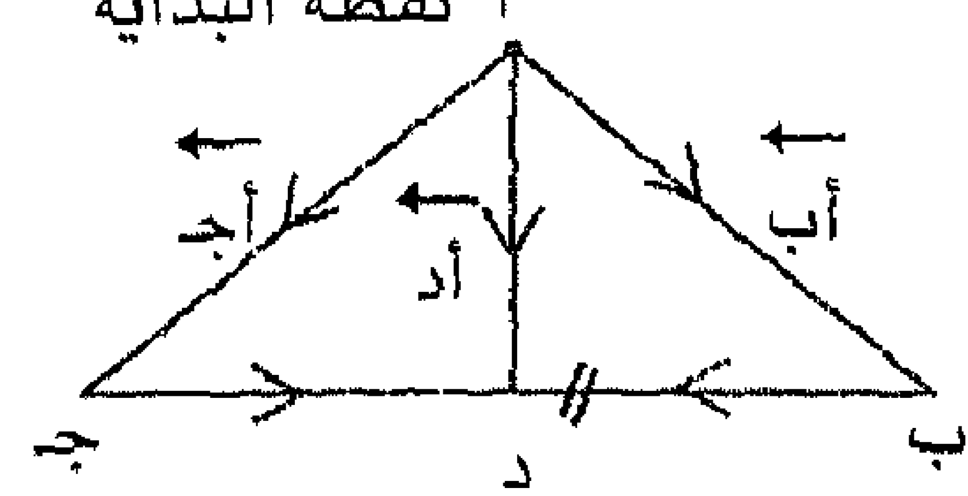
$$= \sqrt{\frac{٢٨٩}{٤} + \frac{٨١}{٤} + \frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٣٧١}{٤}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣٧١}}{٢} = \frac{١٩{,}٥}{٢} = ٩{,}٩٢\ \text{سم}^{٢}$$

(١٦ – ٥) أمثلة محلولة على المتجهات

مثـــال ١: إذا كـــان أد مـــستقيم متوســط في المثلــث أ ب جــ،

أكتب $\overleftarrow{\text{أد}}$ بدلالة $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$



الحل:

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = \overleftarrow{\text{أ د}}$ (قاعدة المثلث)

وكذلك $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـ د}} = \overleftarrow{\text{أ د}}$ (قاعدة المثلث)

جمعاً $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} + (\overleftarrow{\text{ب د}} + \overleftarrow{\text{جـ د}}) = ٢\ \overleftarrow{\text{أ د}}$

لكن $\overleftarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ متجهان متساويان بالطول ومتعاكسان بالاتجاه

$\therefore\ \overleftarrow{\text{ب د}} = -\ \overleftarrow{\text{جـ د}}$ أو $\overleftarrow{\text{جـ د}} = -\ \overleftarrow{\text{ب د}}$

$\therefore\ \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} + (\overleftarrow{\text{ب د}} - \overleftarrow{\text{جـ د}}) = ٢\ \overleftarrow{\text{أ د}}$ (كون $\overleftarrow{\text{ب د}} - \overleftarrow{\text{ب د}} = ٠$)

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٢\ \overleftarrow{\text{أ د}}$

مثال ٢: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = و_{١} - ٣\ و_{٢}$

$\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\ و_{١} + ٥\ و_{٢}$

$\overleftarrow{\text{جـ}} = ٣\ و_{١} - ٤\ و_{٢}$

فجد المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ الذي يحقق المعادلة:

$٢\ \overleftarrow{\text{أ}} + ٣\ \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - ٢\ \overleftarrow{\text{ب}} + ٤\ \overleftarrow{\text{س}}$

الحل: $٢\ \overleftarrow{\text{أ}} + ٣\ \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - ٢\ \overleftarrow{\text{ب}} + ٤\ \overleftarrow{\text{س}}$

$-\ ٣\ \overleftarrow{\text{س}}$ $\qquad$ $-\ ٣\ \overleftarrow{\text{س}}$

٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{جـ}}$ - ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{س}}$

- $\overleftarrow{\text{جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ - $\overleftarrow{\text{جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$

---

٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ - $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$

∴ $\overleftarrow{\text{س}}$ = ٢ (و$_{١}$ - ٣ و$_{٢}$) + ٢ (٢ و$_{١}$ + ٥ و$_{٢}$) - (٣ و$_{١}$ - ٤ و$_{٢}$)

= ٢ و$_{١}$ - ٦ و$_{٢}$ + ٤ و$_{١}$ + ١٠ و$_{٢}$ - ٣ و$_{١}$ + ٤ و$_{٢}$

∴ $\overleftarrow{\text{س}}$ = ٣ و$_{١}$ + ٨ و$_{٢}$

⇦مثال ٣: ماذا تمثل المعادلة التالية:

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٤س - ٦س + ٨ع + ٢٩ = صفر

الحل: مبدئياً يمكن أن تمثل كرة ولنجد نصف قطرها ومركزها بواسطة إكمال المربعات هكذا:

(س^{٢} – ٤ س) + (ص^{٢} – ٦ ص) + (ع^{٢} + ٨ ع) = - ٢٩

وبإضافة مربعات أنصاف معاملات المتغيرات س، ص، ع إلى طرفي المعادلة نحصل على:

(س^{٢} – ٤س + ٢^{٢}) + (ص^{٢} – ٦ ص+ ٣^{٢}) + (ع^{٢} + ٨ ع+ ٤^{٢}) = - ٢٩ + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}

∴ (س – ٢)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} + (ع+ ٤)^{٢} = - ٢٩ + ٤ + ٩ + ١٦

∴ (س – ٢)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} + (ع+ ٤)^{٢} = صفر

وبما أن (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} + (ع+ جـ)^{٢} = ر^{٢} الصورة القياسية لمعادلة الكرة فإن ر^{٢}= صفر ⟵ ر = صفر فالكرة التي نصف قطرها = صفر هي نقطة وإحداثيات المركز م (٢، ٣، - ٤) حيث إحداثيات النقطة.

فالمعادلة تمثل نقطة م (٢، ٣، - ٤)

ومن هنا يمكن استنتاج أنه

عندما $ر^٢$ > صفر ⟵ المعادلة تمثل كرة نصف قطرها ر.

عندما $ر^٢$ = صفر ⟵ المعادلة تمثل نقطة.

عندما $ر^٢$ < صفر ⟵ المعادلة لا تمثل شكلاً هندسياً.

⇦مثال ٤: إذا كانت أ (- ١، ٣، ٦)، ب (٤، ٠، ٥) نقطتان في الفضاء

احسب طول القطعة المستقيمة أب.

$$|أب| = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(-١ - ٤)^٢ + (٣ - ٠)^٢ + (٦ - ٥)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٥ + ٩ + ١} = \sqrt{٣٥} = ٥,٩ \text{ وحدة طول}$$

⇦مثال ٥: أوجد المسافة بين النقطتين أ (٢جاس، جتاس، ظاس)

ب (جاس، ٢جتاس، صفر)

$$|أب| = \sqrt{(٢جاس - جاس)^٢ + (جتاس - ٢جتاس)^٢ + (ظاس - صفر)^٢}$$

$$= \sqrt{جا^٢س + (- جتاس)^٢ + ظا^٢س}$$

$$= \sqrt{جا^٢س + جتا^٢س + ظا^٢س}$$

$$= \sqrt{١ + ظا^٢س}$$

لكن ١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س (من المتطابقة المشهورة جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ بعد قسمة طرفيها على جتاس)

∴ | أب | = $\sqrt{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ = قاس

∴ المسافة بين النقطتين أ ، ب هي قاس.

⇦مثال ٦: أوجد معادلة الكرة التي مركزها م (٢، ١، - ٧) ونصف قطرها ٥ وحدات.

الحل:

الصورة القياسية للمعادلة هي: التي مركزها (أ، ب، جـ) ونصف قطرها ر

(س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} + (ع+ جـ)^{٢} = ر^{٢}

∴ (س – ٢)^{٢} + (ص – ١)^{٢} + (ع+ ٧)^{٢} = ٥^{٢}

وبعد فك الأقواس وجعل الصورة القياسية بالصورة العامة هكذا:

س^{٢} – ٤س + ٤ + ص^{٢} – ٢ ص+ ١ + ع^{٢} + ١٤ ع + ٤٩ = ٢٥

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤س – ٢ ص + ١٤ ع + ٥٤ = ٢٥

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤س – ٢ ص + ١٤ ع + ٥٤ - ٢٥ = صفر

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤س – ٢ ص + ١٤ ع + ٢٩ = صفر معادلة الكرة.

⇦مثال ٧: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٣، ٤) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١، ٢، ٢)

أوجد (١) $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$ (٢) $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{أ}}$

الحل: إنه الضرب الداخلي أو النقطي

$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = أ١ ب١ + أ٢ ب٢ + أ٣ ب٣

= (٢ × ١) + (٣ × ٢) + (٤ × ٢) = ٢ + ٦ + ٨ = ١٦

$\overleftarrow{ب} . \overleftarrow{أ}$ = ب١ أ١ + ب٢ أ٢ + ب٣ أ٣

= (١ × ٢) + (٢ × ٣) + (٢ × ٤) = ٢ + ٦ + ٨ = ١٦

أي أن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{ب} . \overleftarrow{أ}$ = ١٦ فالضرب النقطي للمتجهات تبديلي

⇦مثال ٨: ما قيمة جـ التي تجعل المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = ٣و١ − و٢ − جـ و٣

$\overleftarrow{ب}$ = ٢ جـ و١ − ٣و٢ − ٤ و٣

شرط التعامد هو أن يكون $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = صفر

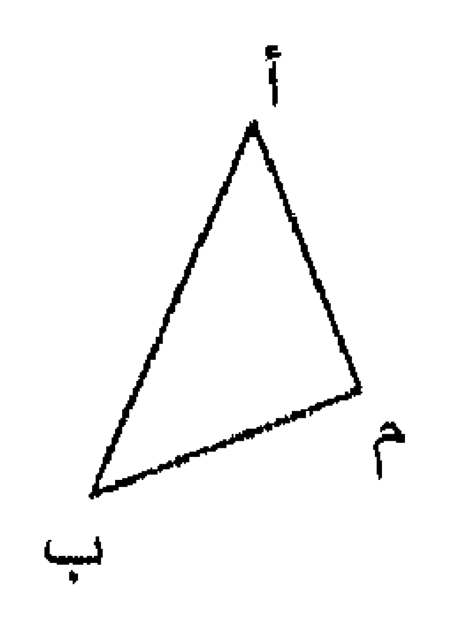
أي أن $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ = (٣ × ٢جـ) + (− ١ × − ٣) + (− جـ × − ٤) = صفر

٦ جـ + ٣ + ٤ جـ = صفر

١٠ جـ = − ٣

جـ = − $\frac{٣}{١٠}$

⇦مثال ٩: بين أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه النقط أ (١، − ١، ١)، ب (٢، ١، − ١)، م (٠، ٠، ٠) قائم الزاوية.



الحل: نجد أطوال أضلاعه

أ ب = $\sqrt{(١ − ٢)^٢ + (− ١ − ١)^٢ + (١+ ١)^٢}$

= $\sqrt{١ + ٤ + ٤}$ = $\sqrt{٩}$

أ م = $\sqrt{(١ − ٠)^٢ + (− ١ − ٠)^٢ + (١− ٠)^٢}$

$= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

ب م $= \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (-1 - 0)^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

والآن (أ ب)^2 $\overset{?}{=}$ (أ م)^2 + (ب م)^2

$(\sqrt{9})^2 \overset{?}{=} (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2$

نعم $9 = 3 + 6 = 9$

∴ (أ ب)^2 = (أ م)^2 + (ب م)^2 عكس نظرية فيثاغورس

∴ المثلث أ م ب وقائم الزاوية في م.

⇦مثال ١٠: أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ} = 2و_1 - و_2 - 2و_3$

$\overleftarrow{ب} = و_1 - و_2$

الحل: جتاهـ = $\dfrac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| \cdot |\overleftarrow{ب}|}$

$= \dfrac{(2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0)}{\sqrt{4 + 1 + 4} \times \sqrt{1 + 1}}$

$= \dfrac{2 + 1}{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ∡ هـ = $\frac{\pi}{4}$ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين.

مثال ١١: احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه:

أ (٣، - ٢، ١)

ب (٧، - ٣، ٤)

جـ (٥، ١، ٠)

أ (٣، -٢، ١)
$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$
حـ (١، ٠، ٥)

الحل:

بما أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ $|\overleftarrow{\text{أ ب}} \times \overleftarrow{\text{أ جـ}}|$ لذلك تكون من الضلعين المتجاورين أ ب، أ جـ المتجهين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

هكذا: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب - أ = (٧ $و_١$ - ٣$و_٢$ + ٤$و_٣$) - (٣$و_١$ - ٢$و_٢$ + $و_٣$)

= ٧$و_١$ - ٣$و_٢$ + ٤$و_٣$ - ٣$و_١$ + ٢$و_٢$ - ١$و_٣$

= ٤$و_١$ - $و_٢$ + ٣$و_٣$

وكذلك $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = جـ - أ = ٥$و_١$ + ١$و_٢$ - (٣$و_١$ - ٢$و_٢$ + ١$و_٣$)

= ٥$و_١$ + ١$و_٢$ - ٣$و_١$ + ٢$و_٢$ - ١$و_٣$

= ٢$و_١$ + ٣$و_٢$ - ١$و_٣$

ومنها $\overleftarrow{\text{أ ب}} \times \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ =

$$\begin{vmatrix} و_١ & و_٢ & و_٣ \\ ٤ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

= $و_١$ (١ - ٩) - $و_٢$ (- ٤ - ٦) + $و_٣$ (١٢ + ٢)

∴ مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ $|\overleftarrow{\text{أ ب}} \times \overleftarrow{\text{أ جـ}}|$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{(-٨)^٢ + (١٠)^٢ + (١٤)^٢}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٦٤ + ١٠٠ + ١٩٦}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{٣٦٠}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣٦ \times ١٠}$

$= (\frac{1}{2})(6)(\sqrt{10}) = 3\sqrt{10}$ وحدة مساحة

$= 3\ (3{,}16) = 9{,}48$ وحدة مربعة

⇦مثال ١٢: إذا $\overleftarrow{أ} = 5و_1 + و_2$ ، $\overleftarrow{ب} = 4و_1 - 7و_2$ عبر عن المتجه

$(3\overleftarrow{أ} - 2\overleftarrow{ب})$ بدلالة متجهي الوحدة $و_1$ ، $و_2$

الحل: $3\overleftarrow{أ} - 2\overleftarrow{ب} = 3(5و_1 + و_2) - 2(4و_1 - 7و_2)$

$= 15و_1 + 3و_2 - 8و_1 + 14و_2$

$= 7و_1 + 17و_2$

⇦مثال ١٣: إذا كانت النقطة جـ (٣، ٣، - ٤) منتصف القطعة المستقيمة أ ب في الفضاء حيث أ(٤،٢، - ٥) فما إحداثيات النقطة ب.

ب (٧، ٣، ٤)　　　جـ (٣،٣، - ٤)　　　ب $(ب_1، ب_2، ب_3)$

بما أن إحداثيات جـ هي جـ $\left(\frac{2+ب_1}{2} ، \frac{4+ب_2}{2} ، \frac{-5+ب_3}{2}\right)$

وأيضاً إحداثياتها جـ (٣، ٣، - ٤) فإن

$\frac{2+ب_1}{2} = 3 ، \frac{4+ب_2}{2} = 3 ، \frac{-5+ب_3}{2} = -4$

وبالضرب التبادلي لكل من المعادلات الثلاث السابقة:

$ب_1 + 2 = 6$ ، $ب_2 + 4 = 6$ ، $ب_3 - 5 = -8$

ومنها $ب_1 = 4$ ، $ب_2 = 2$ ، $ب_3 = -3$

∴ إحداثيات ب (٤، ٢، - ٣)

⇦ مثال ١٤:

إذا كان $\overleftarrow{أ} = 3و_1 + 4و_2$

$\overleftarrow{ب} = 2و_1 + 1و_2$

$\overleftarrow{جـ} = -3و_1 + 2و_2$

أوجد $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{ب ج}$

$\overleftarrow{أب}$ = ب – أ = (٢ – ٣) و$_١$ + (١ – ٤) و$_٢$

= - ١و$_١$ - ٣و$_٢$

$\overleftarrow{ب ج}$ = جـ - ب = (- ٣ - ٢)و$_١$ + (٢ - ١)و$_٢$

= - ٥و$_١$ + ١و$_٢$

∴ $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{ب ج}$ = (- ١) (- ٥) + (- ٣) (+١)

= ٥ – ٣ = ٢ تعدد حقيقي

⇦ مثال ١٥:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = - ٣و$_١$ + ٤و$_٢$

$\overleftarrow{ب}$ = ٣و$_١$ - ٤و$_٢$

أوجد | $\overleftarrow{أ}$ |، | $\overleftarrow{ب}$ |، | $\overleftarrow{أب}$ |

الحل:

| $\overleftarrow{أ}$ | = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

| $\overleftarrow{ب}$ | = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

$\overleftarrow{أب}$ = ب – أ = (- ٣ - ٣) و$_١$ + (٤ - ٤) و$_٢$

= - ٦و$_١$ + ٨و$_٢$

∴ | $\overleftarrow{أب}$ | = $\sqrt{(-٦)^٢ + (٨)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

وكما نلاحظ أن الأطوال الناتجة أعداد حقيقية !!!

⇦ مثال ١٦: ما قيمة ك بحيث يكون المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

حيث $\overleftarrow{أ}$ = و$_١$ + ٢و$_٢$

أ
$\overleftarrow{أب}$
ب
جـ
$\overleftarrow{ب ج}$

$\overleftarrow{ب} = ٣و_١ + ك و_٢$

$\overleftarrow{جـ} = ٩ و_١ - ٣ و_٢$

الحل:

حتى يكون أ ب جـ قائم الزاوية في ب بحيث يكون $\overleftarrow{أب} \perp \overleftarrow{ب جـ}$

وشرط التعامد هو $\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{ب جـ}$ = صفر

$\overleftarrow{أب} = ب - أ = (٣ - ١) و_١ + (ك - ٢) و_٢$

$= ٢ و_١ + (ك - ٢) و_٢$

$\overleftarrow{ب جـ} = جـ - ب = (٩ - ٣) و_١ + (- ٣ - ك) و_٢$

$= ٦ و_١ + (- ٣ - ك) و_٢$

ومنها $\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{ب جـ} = (٢ \times ٦) + (ك - ٢) (- ٣ - ك)$ = صفر

∴ $١٢ + \{- ٣ك - ك^٢ + ٦ + ٢ ك\}$ = صفر

$١٢ - ٣ك - ك^٢ + ٦ + ٢ ك$ = صفر

$- (- ك^٢ - ك + ١٨$ = صفر)

المميز: $ب^٢ - ٤أجـ = (١)^٢ - ٤ \times ١ \times (- ١٨)$

$= ١ + ٧٢ = ٧٣$

$∴ ك = \frac{- ب \pm \sqrt{٧٣}}{٢} = \frac{- ١ \pm \sqrt{٧٣}}{٢}$

$∴ ك = \left(\frac{- ١ - \sqrt{٧٣}}{٢} \text{ أو } \frac{- ١ + \sqrt{٧٣}}{٢}\right)$

⇦ مثال ١٧:

إذا كانت الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ هي ٦٠° وكان $|\overleftarrow{أ}| = ٢$ ، $|\overleftarrow{ب}| = ٥$ أوجد $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$

الحل:

بما أن جتاهـ = $\frac{\overleftarrow{أ} \,.\, \overleftarrow{ب}}{|\overleftarrow{أ}| \,.\, |\overleftarrow{ب}|}$ وبالضرب التبادلي

فإن $\overleftarrow{أ} \,.\, \overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}| \,.\, |\overleftarrow{ب}|$ جتاهـ

أي أن $\overleftarrow{أ} \,.\, \overleftarrow{ب}$ = (٢) (٥) جتا ٦٠°

= (٢) (٥) ($\frac{١}{٢}$) = ٥ كعدد حقيقي

⇦ مثال ١٨:

هل النقط الثلاثة $م_١$ (٠، ٣، - ٤) ، $م_٢$ (١، ٢، - ٢) ، $م_٣$ (٣، ٠، ١) تقع على استقامة واحدة؟

الحل:

إذا كان طول $م_١ م_٣$ = مجموع طولي $م_١ م_٢$ + $م_٢ م_٣$ فالنقط الثلاثة مستقيمة أي تقع على استقامة واحد.

نبدأ بإيجاد الأطوال:

$م_١ م_٣ = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٠ - ٣) + (- ٤ - ١)} = \sqrt{٩ + ٩ + ٢٥}$

$= \sqrt{٣٤} = ٦,٥٥٧$

$م_١ م_٢ = \sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٢ - ٣)^٢ + (- ٢ + ٤)^٢} = \sqrt{١ + ١ + ٤}$

$= \sqrt{٦} = ٢,٤٤٩$

$م_٢ م_٣ = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٠ - ٢)^٢ + (١ + ٢)^٢} = \sqrt{٤ + ٤ + ٩}$

$= \sqrt{١٧} = ٤,١٢٣$

ولأن ٦,٥٥٧ = ٢,٤٤٩ + ٤,١٢٣ = ٦,٥٧٢ تقريباً

فإن النقط الثلاث $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ مستقيمة أي تقع على استقامة واحدة.

⇦ مثال ١٩: إذا كانت إحداثيات نقطة بداية المتجه $\overleftarrow{أ} = ٦و_١ - ٩ و_٢$ هي

(- ٢، ١) فما إحداثيات نقطة نهايته؟

الحل: نفرض أن $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{س ص}$ فتكون س (- ٢، ١) $(س_١، س_٢)$ نقطة البداية،

ص$(ص_١، ص_٢)$ نقطة النهاية.

وبما أن $\overleftarrow{س ص} = ص - س = (ص_١، س_١) و_١ + (ص_٢ - س_٢) و_٢$

$= (ص_١، ٢) و_١ + (ص_٢ - ١) و_٢$

$= ٦ و_١ + (- ٩) و_٢$

∴ $ص_١ + ٢ = ٦ \longrightarrow ص_١ = ٦ - ٢ = ٤$

وكذلك $ص_٢ - ١ = - ٩ \longrightarrow ص_٢ = - ٩ + ١ = - ٨$

∴ ص (٤، - ٨) هي نقطة النهاية.

⇦ مثال ٢٠: إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٤ و_١ - ٦ و_٢ + ٣ و_٣$

$\overleftarrow{ب} = و_١ + ٢ و_٢ - و_٣$

$\overleftarrow{جـ} = - ٦ و_١ + ٣ و_٣$

أوجد الأعداد ل، م، ن حيث ل $\overleftarrow{أ}$ + م $\overleftarrow{ب}$ + ن $\overleftarrow{جـ}$ = $و_٢ + و_٣$

ل $\overleftarrow{أ}$ = ٤ل $و_١$ - ٦ ل $و_٢$ + ٣ ل $و_٣$

م $\overleftarrow{ب}$ = م $و_١$ + ٢م $و_٢$ - م $و_٣$

ن $\overleftarrow{جـ}$ = - ٦ ن $و_١$ + ٣ ن $و_٣$

ومنه ل $\overleftarrow{أ}$ + م $\overleftarrow{ب}$ + ن $\overleftarrow{جـ}$

= (٤ل + م - ٦ ن) $و_١$ (- ٦ ل + ٢م + ٣ ن) $و_٣$

+ (٣ل − م) $و_{٣}$ = $و_{٣}$ + $و_{٣}$

أي أن: التساوي بمعادلات $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $و_{٣}$ (تناظرها)

٤ل + م − ٦ ن = صفر ①

− ٦ ل + ٢م + ٣ ن = ١ ②

٣ل − م = ١ ③

وبحل المعادلات بطريقة الحذف أو المحددات (كريمر او الصف البسيط)

والأفضل هو الحذف.

لحذف ن

٤ل + م − ٦ ن = صفر ①

٢ (− ٦ ل + ٢م + ٣ ن = ١) ②

٤ل + م − ٦ ن = صفر ①

− ١٢ ل + ٤م + ٦ ن = ٢ ② جمعاً

− ٨ ل + ٥ م = ٢ ④

وبحل المعادلتين (٣ل − م = ١ ③ ، − ٨ ل + ٥ م = ٢ ④) بالحذف

١٥ل − ٥ م = ٥

− ٨ ل + ٥ م = ٢ جمعاً

---

٧ ل = ٧ ← **ل = ١**

لكن ٣ل − م = ١ (٣)

∴ ٣ (١) − م = ١

− م = − ٣ + ١ = − ٢

م = ٢

لكن ٤ل + م − ٦ ن = صفر

∴ ٤ (١) + ٢ − ٦ ن = صفر

٤ + ٢ − ٦ ن = صفر

− ٦ ن = − ٦

ن = ١

∴ ل = ١

م = ٢

ن = ١

(١٦ – ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) احسب المسافة بين النقطتين أ (١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٣، ٢، ١) في الفضاء.

{ $٢\sqrt{٢}$ }

(٢) بين أن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $و_١$ – ٧ $و_٢$ + ٢ $و_٣$

$\overleftarrow{ب}$ = ١٠ $و_١$ + ٤ $و_٢$ - $و_٣$ متعامدان

{إرشاد شرط التعامد: $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = صفر}

(٣) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ٥ $و_١$ + $و_٢$

$\overleftarrow{ب}$ = ٤ $و_١$ – ٧ $و_٢$

أوجد ٣ $\overleftarrow{أ}$ - ٢ $\overleftarrow{ب}$

{ ٧ $و_١$ + ١٧ $و_٢$ }

(٤) احسب $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ إذا كان

$\overleftarrow{أ}$ = ٢ $و_١$ – $و_٢$

$\overleftarrow{ب}$ = $و_١$ – ٣ $و_٢$ + ٢ $و_٣$

{ - ٣ $و_١$ - ٥ $و_٢$ - ٦ $و_٣$}

(٥) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = $و_١$ + ٢ $و_٢$

$\overleftarrow{ب}$ = ٣ $و_١$ - ٥ $و_٢$

أوجد $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$ ، ٤ $\overleftarrow{أ}$ ، - ٥ $\overleftarrow{ب}$

(٦) أوجد مركز الكرة التي معادلتها:

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٦س + ٨ ص + ٤ ع + ٤ = صفر ونصف قطرها أيضاً.

{ م (٣، – ٤، – ٢)، نق = ٥}

إرشاد: إكمال المربعات

(٧) تكتب معادلة الكرة التي قطرها أ ب حيث أ (١، ٤، ٢)، ب (– ٧، ٢، ٢)

{ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦س – ٢ ص – ١٩ = صفر }

(٧) احسب احداثيات نقطة منتصف القطعة أ ب حيث أ (٠، – ٢، ٥)، ب (٤، ١، ٠)

{ جـ (٢، – $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) }

(٩) اكتب معادلة الكرة التي مركزها م (٢، ٤، – ٤) وتمر بنقطة الأصل.

{ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٤ س – ٨ ص + ٨ ع = صفر }

إرشاد: أوجد نصف قطرها أولاً.

(١٠) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = و$_{١}$ – ٢ و$_{٢}$ + ٣ و$_{٣}$

$\overleftarrow{ب}$ = – ٤ و$_{١}$ + و$_{٣}$

احسب: «١» | $\overleftarrow{أ}$ | ، «٢» | $\overleftarrow{ب}$ | ، «٣» | – ٧ $\overleftarrow{أ}$ |

«٤» | $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ | ، «٥» | $\overleftarrow{أ}$ – $\overleftarrow{ب}$ |

{ $\sqrt{١٤}$ ، $\sqrt{١٧}$ ، ٧ $\sqrt{١٤}$ ، $\sqrt{١٩}$ ، $\sqrt{٤٣}$ }

(١١) أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٣و_١ - و_٢ - ٢و_٣$

$\overleftarrow{ب} = و_١ + ٢و_٢ + ٣و_٣$

$\{ \frac{\pi}{٣} \}$

(١٢) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣و_١ - و_٢ - ٢و_٣$

$\overleftarrow{ب} = ٢و_١ - ٣و_٢ + \frac{١}{٢}و_٣$

ما قيمة $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$

{ ٨ } كعدد حقيقي

(١٣) أيٌ من أزواج المتجهات التالية متعامدة.

«١» ($\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$) حيث $\overleftarrow{أ} = و_١ - و_٢$ ، $\overleftarrow{ب} = و_١ + و_٢$

{ متعامدان }

«٢» ($\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$) حيث $\overleftarrow{أ} = \sqrt{٢}و_١ + ٣و_٢ + و_٣$

$\overleftarrow{ب} = - و_١ + \sqrt{٢}و_٢ + ٥و_٣$ { لا }

إرشاد شرط التعامد $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} =$ صفر

(١٤) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٢و_١ - و_٢ - ٣و_٣$

$\overleftarrow{ب} = - و_١ - ٢و_٢ + ٤و_٣$

أوجد (١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ (٢) $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ (٣) ماذا تستنتج؟

{$٢و_١ - ١١و_٢ - ٥و_٣$ ، $- ٢و_١ + ١١و_٢ + ٥و_٣$ ، الاستنتاج $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = - (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ})$}

(١٥) أوجد مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها

$$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢س + ٤ص + ٦ع = صفر$$

{م (١، ٢، - ٣) ، نق = $\sqrt{١٤}$ ، إكمال المربعات}

(١٦) إذا كان $\overleftarrow{أ} = - و_{١} + ٣ و_{٢}$

$\overleftarrow{ب} = و_{١} + ٢ و_{٢}$

أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

{ $\frac{\pi}{٤}$ }

(١٧) احسب المسافة بين النقطة ك (٢، ٦، - ٤) ومنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين ل (- ١، ٢، ٨)، م (٥، - ٤، ٦).

(١٨) ما طول نصف قطر الكرة التي معادلتها

$$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س + ٨ص - ٤ع + ٥ = صفر$$

(١٩) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ} = و_{١} + و_{٢} + ٢ و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٣ و_{١} + ٢ و_{٢} - و_{٣}$

(٢٠) اكتب معادلة الكرة إذا كانت النقطتان (٥، ٦، - ١) ، (- ٧، ٤، ٣) طرفي قطر فيها.

(٢١) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣ و_{١} - و_{٢} + و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٢ و_{١} + ٣ و_{٢} - و_{٣}$ احسب $|٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}|$

{٥ $\sqrt{٤}$ وحدة طول}

(٢٢) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣و_{١} + و_{٢}$ ، $\overleftarrow{ب} = جـو_{٢} - و_{٣}$ حيث جـ ∈ ح

ما قيمة جـ عندما $|\overleftarrow{أ}| = |\overleftarrow{ب}|$ $\{\pm ٣\}$

(٢٣) إذا كان $\overleftarrow{أ} = جـو_{١} + (جـ - ١)و_{٢} + (جـ + ١)و_{٣}$ ، حيث جـ ∈ ح ما قيمة جـ عندما $|\overleftarrow{أ}| = ٢$ $\{\pm \frac{\sqrt{٦}}{٣}\}$

(٢٤) إذا كان $\overleftarrow{أ} = و_{١} - ٢و_{٢} + ٣و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٢و_{١} + و_{٢} - و_{٣}$ أوجد $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

$\{- و_{١} + ٧و_{٢} + ٥و_{٣}\}$

(٢٥) هل النقط التالية أ (١، ١، ٢) ، ب (١، ٣، ٦)، جـ (١، ٢، ٤) الواقعة في الفضاء تقع على استقامة واحدة ؟ وضح إجابتك.

(٢٦) إذا كان $\overleftarrow{أ} = و_{١} + ٢و_{٢} + ٣و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = و_{١} - ٣و_{٢} + ٢و_{٣}$

أوجد $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$

(٢٧) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٤و_{١} - ٦و_{٢} + ٣و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = و_{١} + ٢و_{٢} - ٣و_{٣}$ ، $\overleftarrow{جـ} = - ٦و_{١} + ٣و_{٣}$

ما قيمة الأعداد الحقيقية ل، م ، ن علماً أن

$ل\overleftarrow{أ} + م\overleftarrow{ب} + ن\overleftarrow{جـ} = و_{٢} + و_{٣}$

(٢٨) إذا كان $\overleftarrow{أ} = ٣و_{١} + ٢و_{٢} + و_{٣}$ ، $\overleftarrow{ب} = و_{١} - و_{٢} - و_{٣}$

أوجد $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{ب}$

(٢٩) ما قيمة جـ التي تجعل المتجهين $\overleftarrow{أ} = ٢و_{١} + جـو_{٢} + ٤و_{٣}$

$\overleftarrow{ب}$ = ٢ جـ $و_١$ - ٣ $و_٢$ - ٧ $و_٣$ متعامدين

إرشاد: شرط التعامد $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = صفر

(٣٠) أ ب جـ مثلث زواياه أ ، ب ، جـ وأضلاعه أَ ، بَ ، جَ بين باستخدام قاعدة حساب مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ | $\overleftarrow{أ}$ | | $\overleftarrow{ب}$ | جا جـ حيث | $\overleftarrow{أ}$ | = أَ، أن : $\frac{جا أ}{أَ} = \frac{جا ب}{بَ} = \frac{جا جـ}{جَ}$

(٣١) ما طول نصف قطر الكرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ + ٥ ع = صفر

(٣٢) إذا كانت النقط ك (١، ١، ١) ، ل (- ١، ٢، ٠) ، م (٢، ٠، - ١) ثلاث نقط في الفضاء تمثل رؤوس المثلث ك ل م، احسب أطوال أضلاعه ومساحته.

(٣٣) اكتب معادلة الكرة التي مركزها (٢، ٣، - ١) وتمر بالنقطة (١، ٧، - ٩).

(٣٤) احسب البعد بين النقطتين أ (٨، - ٣، ٨) ، ب (٦، - ١، ٩) {٣}

(٣٥) في المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (١، ٢، - ٣) ، ب (٠، ١، ٢) ، جـ (٢، ١، ١) أوجد طولي الضلعين أ ب ، أ جـ .

{٣ $\sqrt{٣}$، ٣ $\sqrt{٢}$}

(٣٦) احسب قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين

$\overleftarrow{أ}$ = $و_١$ + $و_٢$ + $و_٣$ ، $\overleftarrow{ب}$ = ٢ $و_١$ + ٣ $و_٣$ {٣٧° تقريباً}

(٣٧) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه أ (٣، ٤، - ١) ، ب (٢، ٠، ٤) ، جـ (- ٣، ٥، ٤)

{٢١,٧ وحدة مساحة}

(٣٨) أوجد نصف قطر الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ - ٢س - ٤ ص - ٤ = صفر

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت – ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

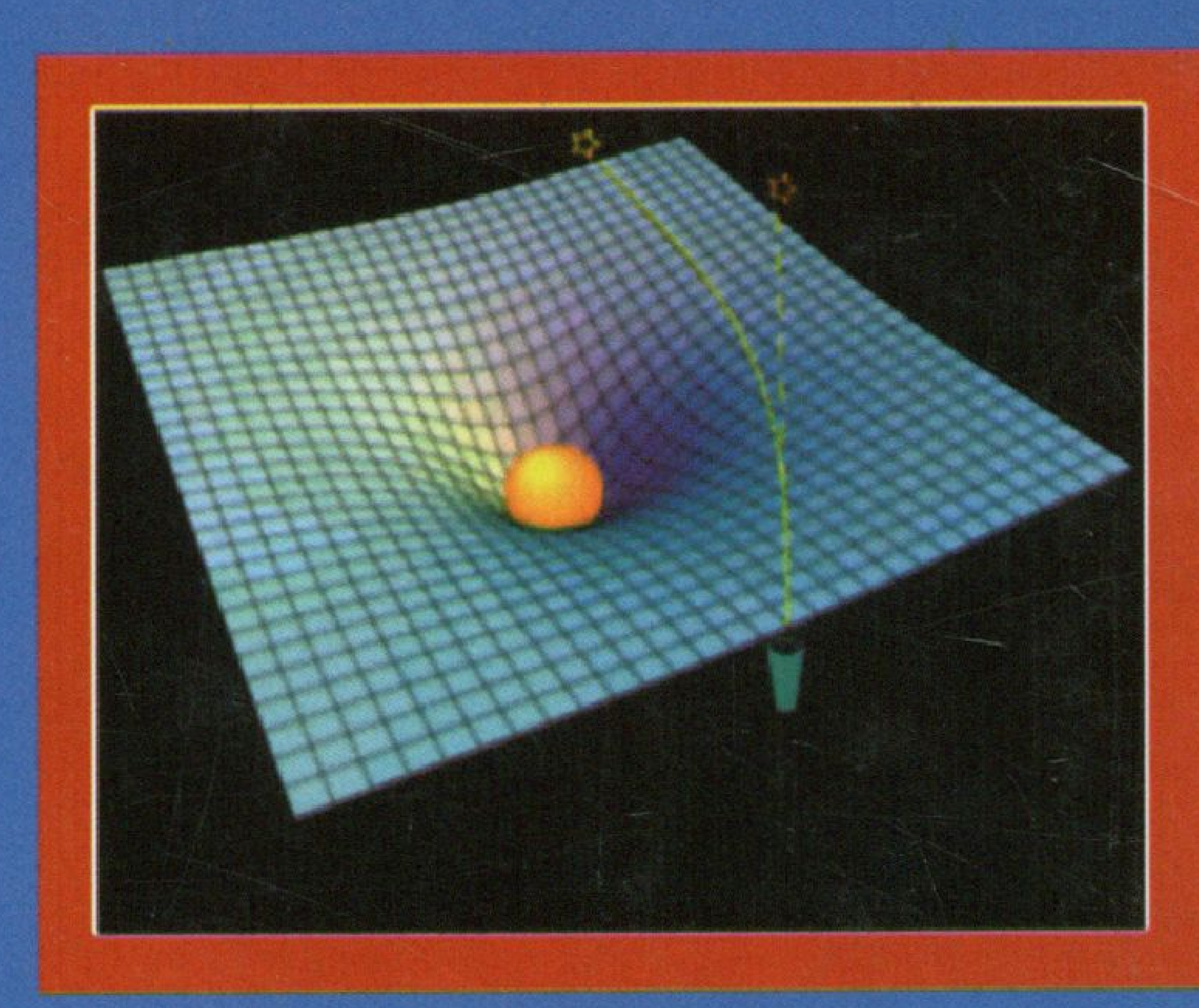
(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبدائ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

الهندسة الفضائية
المتتاليات والمتسلسلات
المنحنيات





للنشر والتوزيع
الأردن - عمان
هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252
فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781
البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo
الموقع الإلكتروني: www.darosama.net